

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Tarski, Alfred:** Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik. Wien: Julius Springer 1937. X, 166 S. RM. 7.50.

This little book is intended to present at least a general notion of modern investigations in the foundations of mathematics for the benefit of readers whose mathematical training does not exceed that offered in the middle schools of central Europe. From this point of view it must be regarded as an excellent piece of work. It is, of course, very simply written, and it deals only with the most elementary matters; there is no complicated symbolism, no formal proofs, and likewise no discussion of the difficult philosophical questions connected with existence, mathematical induction and the paradoxes. But in spite of these limitations it gives a surprisingly adequate account of the principal ideas of mathematical logic and methodology. The treatment is characterized not only by lucidity, but by a high degree of precision; the author is even consistent in maintaining the distinction between an object and its name, which has been insisted upon in investigations by the author, Carnap, and others. The various notions are illustrated by apt illustrations, chosen mostly from elementary arithmetic and geometry; and there are instructive examples at the end of the chapters. The book is divided into two parts. In the first part are discussed the following ideas: variables and attendant notions, such as function and quantifier; the connectives of the algebra of propositions; identity; classes and relations and notions connected with them; and finally the nature of postulate systems and formal methods, with the accompanying notions of consistency, independence, and completeness. In the second part these ideas are illustrated in relation to certain portions of the arithmetic of real numbers. The book thus deals with mathematical logic in the strict sense; it does not deal with intuitionism. The book is a translation of a Polish work which appeared about a year before. *H. B. Curry* (State College).

Gokiel, L. P.: Über den Funktionsbegriff. Trav. Inst. Math. Tbilissi 2, 1—35 u. dtsch. Zusammenfassung 35 (1937) [Russisch].

Philosophisch gefärbte Betrachtungen über den allgemeinen Begriff der Funktion und im Zusammenhang damit über die Begriffe des geordneten Paares und der Operation. Ziemlich interessante Kritik der „realistischen“ Versuche, den Funktionsbegriff durch syntaktische, psychologische u. dgl. Bedingungen einzuengen. In einem Exkurs des Verf. gegen die logische Einsetzungsregel (was an die alten Überlegungen von Bolzano und Lewis Carroll anlässlich des modus ponens erinnert) wurden, nach der Meinung des Ref., Regel und Axiom vermischt. *A. Lindenbaum.*

Bernstein, B. A.: Remark on Nicod's reduction of Principia mathematica. J. Symbolic Logic 2, 165—166 (1937).

Die Note soll eine kleine formale Lücke in Nicods Herleitung seines λ -Axiomensystems aus den aussagenlogischen Axiomen der Principia Mathematica (Proc. Cambridge Philos. Soc. 19), die den Übergang von einem Formelteil $p''|q'$ zu $p|q'$ betrifft, schließen. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Mihalescu, Eugen Gh.: Recherches sur l'équivalence et la réciprocity dans le calcul des propositions. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 116—153 (1938).

Für die Relationen Äquivalenz ($E..$) und Kontradiktion ($R..$) wird ein deduktives System aufgestellt, das die Axiome $EEpqEqp$, $EEEpqrEpEqp$, $EERpqRrsEEpqErs$ sowie die Einsetzungsregel und die E -Schlußregel umfaßt. An Hand zweier Normalformtypen gelangt der Autor zu einem Ergebnis, das dem in dies. Zbl. 16, 337 referierten

ganz analog ist (wobei das 2stellige R die Rolle des 1stelligen N übernimmt); die einfachste widerspruchsfrei zu den Axiomen fügbare Formel ist hier die „Kontradiktionsformel“ *Rpp*.
Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Quine, W. V.: On derivability. *J. Symbolic Logic* 2, 113—119 (1937).

The notion of derivability here considered may be intuitively explained as follows: If we have given a certain system of elements, a monadic predicate f (i.e. a class), and an $n + 1$ adic predicate g , X is derivable on the basis f by means of g if and only if there exists a finite series of elements Y_1, Y_2, \dots, Y_m , such that Y_m is X and every Y_i either belongs to f or stands in the relation g to certain n of its predecessors. As special cases of this notion we have deducibility from the postulates of a formal system with regard to certain rules of procedure, the definition of $<$ in terms of the successor relation, and — if we extend the notion to ordered pairs — the definition of a numerical function by recursion. It is well known that this derivability can be defined by a formula involving quantification with respect to class variables. In this paper the author shows that it can also be formulated in terms of the system of his paper on substitution (this *Zbl.* 15, 50); this system involves only the functional calculus of the first order with identity, certain constant individuals, and an extra dyadic associative operation of “concatenation”. It follows that “many of the purposes of non-individual variables and recursive definitions can be met by more elementary machinery”. It is claimed — and the claim is plausible, although Quine gives no proof and the reviewer has not checked it — that many of Gödel’s results (this *Zbl.* 2, 1) can be obtained on the basis of the author’s system.
H. B. Curry.

Quine, W. V.: On Cantor’s theorem. *J. Symbolic Logic* 2, 120—124 (1937).

On the basis of his “New Foundations of Mathematical Logic” (this *Zbl.* 16, 193), the author examines the theorem that the subclasses of a given class are more numerous than its elements. He concludes that there is no evident way of demonstrating the theorem as stated; however it is possible to prove that the subclasses are more numerous than the unit subclasses. This strange situation is due to the fact that it does not appear to be possible to construct a general correlation of objects with their unit classes, i.e. a class comprising all and only those ordered pairs of the form $(a, \{a\})$. A similar remark applies to the simplifications of the *Principia Mathematica* due to Gödel (this *Zbl.* 2, 1) and Tarski (this *Zbl.* 7, 97); only here since non-homogeneous relations are excluded, Cantor’s theorem would be automatically understood in the second sense. (In regard to the doubts expressed by the reviewer in the review cited, it has turned out since that some clarification of the notion of stratification is necessary; for the properly clarified system competent persons have made a serious effort to find an inconsistency without success. Cf. the review by Bernays, *J. Symbolic Logic* 2, 86.)
H. B. Curry (State College, Pa.).

Wilkosz, W.: Sur le conventionalisme arithmétique. *Ann. Soc. Polon. math.* 15, 140—144 (1937).

Ausgehend von der gewöhnlichen Summe (\oplus) wird eine Summe ($+$) für natürliche Zahlen an Hand der Definitionen $a + 1 = a \oplus 1$, $a + (b + 1) = a \oplus b \oplus E(b \oplus k, k)$ eingeführt, wo $E(b \oplus k, k)$ die größte natürliche Zahl $< \frac{b \oplus k}{k}$ bezeichnet und k so groß gewählt sein soll, daß man außerstande sei, empirisch (es wird erläutert, in welchem Sinne hier von „empirisch“ gesprochen wird) zwischen $+$ und \oplus zu unterscheiden. Dieses Modell wird zu dem auf das Verhältnis von euklidischer und hyperbolischer Geometrie bezüglichen Musterbeispiel des Konventionalismus in Analogie gesetzt.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Wilkosz, W.: Sur la notion de l’équivalence des systèmes déductifs. *Ann. Soc. Polon. math.* 15, 161—164 (1937).

L’auteur prend pour base logique le système des „*Principia Mathematica*“ sans l’axiome de l’infini et sans celui du choix, et considère des systèmes déductifs quel-

conques, dans lesquels les notions primitives, c.-à-d. les constantes non-logiques (de différents types), sont à remplacer par des variables logiques (de types correspondants); $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots, R, S, \dots$. Alors les axiomes du système (s'ils sont en nombre fini. A. I.) peuvent être réunis en une fonction propositionnelle $T(a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots, R, S, \dots)$. Le système est arithmétisable, lorsqu'on peut construire un exemple dans l'arithmétique des nombres entiers, c.-à-d. y nommer de telles notions primitives ou définies: $a_0, b_0, \dots, \alpha_0, \beta_0, \dots, R_0, S_0, \dots$ que $T(a_0, b_0, \dots, \alpha_0, \beta_0, \dots, R_0, S_0, \dots)$ soit une proposition de l'arithmétique. Deux systèmes T_1 et T_2 sont dits équivalents, lorsqu'on peut trouver dans T_2 un exemple vérifiant T_1 et réciproquement. — Théorème: Tous les systèmes arithmétisables dans lesquels l'existence d'un ensemble infini est démontrable, sont équivalents entre eux. — L'auteur cite des cas de systèmes dont l'équivalence, découlant de ce théorème, est inattendue; quant à la question comment rendre cette notion plus intuitive, l'auteur promet la réponse dans une note ultérieure. [Il y a ici une confusion (1) de la notion d'exemple „effectif“ et (2) de celle d'une démonstration de l'existence: à notre avis, afin d'aboutir au théorème cité, il faut parler de la notion (2), tandis que la „vraie“ notion de l'équivalence s'obtient aisément avec (1). Cf. aussi Tarski, ce Zbl. 12, 1. A.L.] *A. Lindenbaum* (Warszawa).

Hirano, Jirô: Einige Bemerkungen zum v. Neumannschen Axiomensystem der Mengenlehre. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 1027—1045 (1937).

Eine Modifikation des v. Neumannschen Systems der Mengenlehre [J. f. Mat. 154, 219 (1925); Math. Z. 27, 669 (1928)]. Es wird erstens: der Identitätsbegriff formalisiert, zweitens: anstatt der zwei binären Grundoperationen eine ternäre eingeführt. [Anm. d. Ref.: Robinson, J. Symbol. Log. 2, 29 (1937), dies. Zbl. 17, 49, kommt hier selbst mit einer binären aus.] Die Kommentare des Verf. zum System sind dem Ref. nicht ganz verständlich. — Am Ende werden einige Hilfssätze hergeleitet, die alle Ausdrücke des Systems auf eine Normalform zurückzuführen gestatten; weitere Entwicklungen werden in einer künftigen Arbeit erscheinen. *A. Lindenbaum.*

Algebra und Zahlentheorie.

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Cartan, Henri: Filtrés et ultrafiltrés. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 777—779 (1937).

This is a sequel to an earlier note on "filters" (this Zbl. 17, 243). The author characterizes compact spaces in terms of filters — a necessary and sufficient for compactness is that every "ultrafilter" be convergent. He characterizes continuous maps in terms of filters also. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U.S.A.).

Stone, M. H.: Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. Čas. mat. fys. 67, 1—25 (1937).

The paper is divided into two parts. The first part generalizes some of Stone's theory of representations of Boolean algebras by fields of sets [Trans. Amer. Math. Soc. 40, 37—111 (1936), this Zbl. 14, 340], to representations of distributive lattices by rings of sets. The theory does not generalize perfectly. Some of the results have been independently published by the reviewer [Duke math. J. 3, 443—454 (1937); this Zbl. 17, 194], but none of the topological results have. There is a close relation between elements and relatively bicompat subsets of the representing space, and the latter is usually a T_0 -space instead of an H -space. Also, the author distinguishes "prime ideals" from "divisorless ideals". The second part correlates in detail the theory of the first part, with aspects of a Brouwerian logic of Heyting (slightly modified by Stone). *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U.S.A.).

Baer, Reinhold: Abelian fields and duality of abelian groups. Amer. J. Math. 59, 869—888 (1937).

Der Hauptzweck der Arbeit ist eine Charakterisierung aller (endlichen oder unendlichen) abelschen Erweiterungen eines Körpers. Das ist eine Verallgemeinerung der

Ergebnisse von Witt [J. f. Math. 173 (1935); dies. Zbl. 11, 291]. — Ist F eine normale separable Erweiterung des Körpers K , so bedeutet $S(K < F)$ die Menge der Galoisschen Gruppen in bezug auf K aller endlichen normalen Erweiterungen von K , die Unterkörper von F sind, $E(K < F)$ die Menge der Ordnungen der Elemente aller Faktorgruppen Gruppen aus $S(K < F)$ nach ihren Kommutatorgruppen, $P(n, K < F)$ die multiplikative Gruppe aller Elemente $\neq 0$ von K , die n -te Potenzen von Elementen von F sind. Enthält K die n verschiedenen n -ten Einheitswurzeln für jedes n aus $E(K < F)$ und ist F eine abelsche Erweiterung von K , so bestimmen die Menge $E(K < F)$ und die Untergruppen $P(n, K < F)$ von K für alle n aus $E(K < F)$ den Körper F eindeutig bis auf Äquivalenz in bezug auf K . Der Satz über Bedingungen, unter denen es zu einem gegebenen Körper K , einer gegebenen Menge E von ganzen positiven Zahlen und gegebenen multiplikativen Untergruppen $D(n)$ von K (für alle n von E) eine abelsche Erweiterung F mit $E(K < F) = E$ und $P(n, K < F) = D(n)$ gibt, bringt die Übersicht der abelschen Erweiterungen zum Abschluß. — Diese Ergebnisse stützen sich auf eine neue Fassung der Theorie von Pontrjagin [Ann. of Math. 35, 361—388 (1934); dies. Zbl. 9, 156] über den Zusammenhang zwischen kompakten und diskreten abelschen Gruppen. S sei eine Menge von endlichen Gruppen; für einige Paare X, Y von ihnen sei eine homomorphe Abbildung $h(X < Y)$ von Y auf X gegeben, und zwar so, daß die Menge S dadurch teilweise geordnet wird. Eine Menge v von Elementen $v(X) \in X$ soll ein Vektor heißen, wenn $v(X)$ für jedes $h(X < Y)$ das Bild von $v(Y)$ ist. Diese Vektoren bilden natürlich eine Gruppe, die, unter einigen ergänzenden Voraussetzungen über S und h , eine Vektorgruppe $V(S, h)$ heißen soll. Eine Untergruppe U von $V(S, h)$ soll abgeschlossen heißen, wenn sie aus allen derartigen Vektoren v besteht, daß $v(X) = 1$ für X aus einer gegebenen Teilmenge von S ist. — Ist W die multiplikative Gruppe aller Einheitswurzeln im Körper der komplexen Zahlen, und ist G eine abelsche Gruppe ohne Elemente unendlicher Ordnung, so soll jeder Homomorphismus der Gruppe G in W ein Charakter von G heißen. Jeder Homomorphismus einer Vektorgruppe $V(S, h)$ auf eine endliche Untergruppe von W , der in 1 von W eine abgeschlossene Untergruppe von $V(S, h)$ überführt, soll ein Charakter von $V(S, h)$ heißen. Dann bilden die Charaktere von G eine Vektorgruppe, die von $V(S, h)$ eine Gruppe, und für diese Gruppen gilt der Pontrjaginsche Dualitätssatz. — Ein Zusammenhang dieser Betrachtungen mit der Theorie der abelschen Erweiterungen besteht darin, daß die Galoissche Gruppe einer abelschen, normalen, separablen Erweiterung F des Körpers K eine Vektorgruppe für $S = S(K < F)$ ist. *A. Kurosch.*

Hirsch, Kurt A.: A note on non-commutative polynomials. J. London Math. Soc. 12, 264—266 (1937).

The author proves the following theorem. Let K be a commutative field of characteristic 0 and $K\{x_1, \dots, x_n\}$ the ring of polynomials in the non-commuting indeterminates x_i and R the difference ring of $K\{x_i\}$ relative to the ideal generated by $x_i x_j - x_j x_i - a_{ij}$ (a_{ij} in K). Then R is simple if and only if the skew matrix (a_{ij}) is non-singular.

Jacobson (Chapel Hill, N. C.).

Asano, Keizō, und Tadasu Nakayama: Über halbbilineare Transformationen. Math. Ann. 115, 87—114 (1937).

If \mathfrak{M} is a vector space over a field K , a semi-linear transformation σ is defined by the conditions $\sigma(u + v) = \sigma u + \sigma v$, $\sigma(\alpha u) = \alpha^S(\sigma u)$ where $u, v \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in K$ and S is an automorphism of K . This leads to the problem of classifying matrices in K relative to the equivalence $B = P^S A P^{-1}$. If $K^*[x]$ is the polynomial ring in which $x\alpha = \alpha^S x$ then as the authors show the problems involving a single linear transformation may be reduced to questions on factorization and similarity (in the sense of Ore, this Zbl. 7, 151) in $K^*[x]$ and if K is commutative and S has finite order m , to corresponding questions in a commutative subset of $K^*[x]$. A number of these results have been obtained also by the referee (this Zbl. 17, 150) in a somewhat more general case. The deeper results about $K^*[x]$ are obtained by the authors by studying the p -adic ex-

tensions $K^*(x)_p$, where $K^*(x)$ is the quotient field of $K^*[x]$. Relations between the polynomial invariants of σ and σ^m are obtained (cf. Nakayama, this Zbl. 17, 3, and Haantjes, this Zbl. 17, 53) and these are applied to obtain conditions that a matrix expressible as $A^{S^{m-1}} \dots A^S A$. The semi-linear transformations commutative with a given one are also considered.

Jacobson (Chapel Hill, N. C.).

Zahlentheorie:

Stibitz, G. R.: An application of number theory of gear ratios. Amer. Math. Monthly 45, 22—31 (1938).

Stern, Erich: Bericht über Studien zu einer allgemeinen mathematischen Theorie der magischen Quadrate. Extrait des C. R. du 2. Congr. Internat. Récréat. Math. 7 pag. (1937).

In diesem Bericht wird eine in knappster Form gehaltene Übersicht gegeben über Methoden zur Bildung von magischen Quadraten und angedeutet, wie sie verallgemeinert werden können. Auch wird die Frage besprochen, Gruppen von magischen Quadraten so abzugrenzen, daß man ihre Anzahl bestimmen kann. Beeger.

Stern, Erich: Über irreguläre pandiagonale lateinische Quadrate mit Primzahlseitenlänge und ihre Bedeutung für das n -Königinnenproblem sowie für die Bildung magischer Quadrate. Nieuw Arch. Wiskde 19, 257—271 (1938).

Fitting, F.: Über eine besondere Art magischer Sterne. Nieuw Arch. Wiskde 19, 272—280 (1938).

Rédei, Ladislaus: Über die Verteilung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduli. Mat. termézet. Ert. 56, Tl 1, 54—83 u. dtsch. Zusammenfassung 84—88 (1937) [Ungarisch].

Für Primzahlen $p \equiv 3(4)$ ist bekanntlich der Überschuß Δ der quadratischen Reste $< \frac{p}{2}$ über die Reste $> \frac{p}{2}$ gleich h bzw. $3h$, wo h die Klassenzahl quadratischer Formen der Diskriminante $-p$ ist. Für Primzahlen $\equiv 1(4)$ gilt $\Delta = 0$. Dies gilt auch für zusammengesetzte Moduln n , deren sämtliche Primteiler $\equiv 1(4)$ sind. Verf. beweist, daß auch für zusammengesetzte Moduln stets $\Delta \geq 0$ gilt, daß aber $\Delta = 0$ nicht nur in dem obenerwähnten Falle eintritt, sondern auch wenn a) alle in n aufgehenden Primzahlen $\equiv 3(4)$ sich in einer solchen Reihenfolge q_1, q_2, \dots, q_v ($2|v$) anordnen lassen, daß q_i quadratischer Rest mod q_{i+1} ist; b) $e_i \equiv i + 1(2)$ gilt für $i = 1, \dots, v$, wobei e_i die Anzahl der Primfaktoren $\equiv 1(4)$ von n ist, für die q_i quadratischer Rest ist. Taussky (London).

Vandiver, H. S.: On Bernoulli's numbers and Fermat's last theorem. Duke math. J. 3, 569—584 (1937).

Bericht über die Fortsetzung (1. Teil in Trans. Amer. Math. Soc. 31, 613 u. Proc. Nat. Acad. Sci. 16, 299) von Berechnungen zum Beweise des letzten Fermatschen Satzes für gewisse Exponenten. Kummer hat bewiesen, daß $x^l + y^l = z^l \dots (1)$ unmöglich ist, wenn l eine reguläre Primzahl ist. Darum haben Verf. und seine Mitarbeiter mit Benutzung der Tabellen der Bernoullischen Zahlen und deren Ausdehnung durch D. H. Lehmer (dies. Zbl. 15, 3) und durch eine spezielle für diesen Zweck abgeleitete Kongruenz für jede Primzahl $l < 618$ festgestellt, ob sie regulär ist oder nicht. Für jedes irreguläre l sind dann zugleich alle B_n gefunden, für welche $B_n \equiv 0(\text{mod } l)$ ist. Um die Unmöglichkeit von (1) auch für diese irregulären Primzahlen < 618 zu beweisen, werden 2 Sätze des Verf. (dies. Zbl. 9, 7) angewandt. Mit Hilfe der Ergebnisse über die Bernoullischen Zahlen wird noch gezeigt, daß der 2. Faktor der Klassenanzahl des Kreiskörpers der l -ten Einheitswurzeln für $l < 618$ nicht durch l teilbar ist. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Gottschalk, Eugen: Zum Fermatschen Problem. Math. Ann. 115, 157—158 (1938).

Durch eine sehr elementare Betrachtung lassen sich die bekannten Kriterien von Wieferich, Mirimanoff, Vandiver, Frobenius so umformen, daß sie ohne Auf-

wand großer Rechenarbeit in einfachster Weise verwertbar werden. Es gilt nämlich der Satz: Es sei p eine ungerade Primzahl, m eine durch p nicht teilbare ganze Zahl und $mp = a \pm b$, wo a und b keine anderen Primfaktoren als 2, 3, 5, 11, 17 bzw. wenn $p \equiv 5 \pmod{6}$ ist, keine größeren Primfaktoren als 19 enthalten; dann ist die Fermatsche Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen unlösbar. Die (vielleicht unendliche) Menge der Primzahlen, für die durch den obigen Satz die Nichtlösbarkeit der Fermatschen Gleichung im Fall I sichergestellt ist, läßt sich bis jetzt noch nicht übersehen. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Chang, Teh-Hsien: Über aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede mindestens einer von n linearen Kongruenzen genügt, deren Moduln die ersten n Primzahlen sind. *Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin* 4, 35—55 (1938).

Let p_1, \dots, p_n be the first n primes, and let ξ_1, \dots, ξ_n be integers. The author proves (without using Brun's method): (1) If $p_n \geq 103$, there exist $2p_n + 1$ consecutive numbers x , each of which satisfies at least one of the congruences $x \equiv \xi_i \pmod{p_i}$ ($i = 1, \dots, n$). (2) If n is large, $2p_n + 1$ may be replaced by $cp_n \log p_n / (\log \log p_n)^2$, where c is a constant. The result (2) in the case $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ was proved by Erdős (see this *Zbl.* 12, 11) by the use of Brun's method. (3) Given any sequence of consecutive numbers of the length specified in (1) or (2) there exist ξ_1, \dots, ξ_n such that each number of the sequence satisfies one of the congruences. *Davenport*.

Raikov, D.: Über die Basen der natürlichen Zahlenreihe. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 595—596 u. deutsch. Text 596—597 (1937) [Russisch].

Verf. erhält das Resultat von A. Stöhr (dies. *Zbl.* 16, 348), und zwar mit genau derselben Methode. *A. Khintchine* (Moskau).

Cudakov, N.: Sur le problème de Goldbach. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 17, 335—338 (1937).

The author proves that the number of even numbers not exceeding x which are not the sum of two primes is $O(x/(\log x)^4)$ for every positive A . *E. C. Titchmarsh*.

Hille, Einar: The inversion problem of Möbius. *Duke math. J.* 3, 549—568 (1937).

The author discusses a number of inversion problems originated by Möbius, *J. f. Math.* 9, 105—123 (1832). For example the linear functional equation

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nz) = g(z)$$

has the formal solution

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n g(nz) = f(z)$$

if

$$a_1 b_1 = 1, \quad \sum_{d|n} a_d b_{n/d} = 0. \quad (n > 1)$$

The problem of finding the reciprocal of the Dirichlet series $\sum a_n n^{-s}$ leads to the same equations. Various conditions under which such processes can be justified are given. Similar problems with integrals instead of series are discussed. *E. C. Titchmarsh*.

Heilbronn, Hans: On real characters. *Acta Arithmet.* 2, 212—213 (1937).

Let $\chi(n)$ be a real non-principal character \pmod{k} , and let

$$S_1(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n), \quad S_m(x) = \sum_{n \leq x} S_{m-1}(n).$$

S. Chowla (see this *Zbl.* 11, 67) found that for many values of k there is an m such that $S_m(x) \geq 0$ for $x \geq 1$. It is proved in this paper that there exist characters χ for which there is no such m . *Davenport* (Manchester).

Erdős, P., und V. Jarník: Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen. *Acta Arithmet.* 2, 214—220 (1937).

Neuer und einfacherer Beweis des folgenden Satzes von A. Khintchine [*Rec. math. Soc. math. Moscou* 32, 203—218 (1924)]: „Zu jedem Paar positiver Zahlen γ, n gibt es ein $\delta = \delta(\gamma, n) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind r_1, \dots, r_n, q ganze

Zahlen mit $q > 0$, $(r_1, \dots, r_n, q) = 1$, und hat

$$r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \equiv 0 \pmod{q}, \quad 0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \gamma q^{1/n}$$

keine ganzzahlige Lösung, so besitzt für jedes ganze m

$$r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \equiv m \pmod{q}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \delta q^{1/n}$$

eine Lösung in ganzen Zahlen.“ — Der Beweis benutzt Sätze über die additiven Darstellungen von Zahlen. — Ein noch kürzerer Beweis des Ref. wird demnächst in den *Acta Arithmet.* erscheinen.

Mahler (Manchester).

Mordell, L. J.: An arithmetical theorem on linear forms. *Acta Arithmet.* 2, 173—176 (1937).

Let $L_r(x) = \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s$ ($r = 1, 2, \dots, n$) be n linear forms with real coefficients in the n variables x_1, x_2, \dots, x_n with determinant $\Delta > 0$. Let $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ be two sets of n non-negative numbers for which

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n + \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \geq \Delta$$

and let c_1, c_2, \dots, c_n be any set of real numbers. — Then at least one of the three sets of inequalities

$$|L_p(x)| \leq \mu_p, \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$|L_p(x)| \leq \nu_p, \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$|L_p(x) - c_p| \leq \frac{1}{2}(\mu_p + \nu_p), \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

has a solution in integers x_1, \dots, x_n , besides the trivial solution $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ of (1) and (2). [N.B. a possible solution $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ of (3) is not trivial!] The idea in the (arithmetic) proof is of the same kind as the idea in the author's proof of Minkowski's theorem on homogeneous linear forms (this *Zbl.* 7, 152). *Koksma*.

Gelfond, A.: Sur une généralisation de l'inégalité de Minkowski. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 17, 447—449 (1937).

Alle Zahlen in diesem Ref. sind reell. Es seien $\xi_\nu = \xi_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\nu\mu} x_\mu$ ($1 \leq \nu \leq n$) n Linearformen mit der Determinante $\Delta \neq 0$; weiter setze man $\eta_\nu = \eta_\nu(y) = \sum_{\mu=1}^n A_{\nu\mu} y_\mu$, wo die $A_{\nu\mu}$ durch $x_\mu = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu\mu} \xi_\nu$ definiert sind. Für positive z_ν sei $\omega(z_1, \dots, z_n)$ bzw. $\Omega(z_1, \dots, z_n)$ die Anzahl der vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte (x) bzw. (y) mit $|\xi_\nu(x)| \leq z_\nu$ bzw. $|\eta_\nu(y)| < z_\nu$ ($1 \leq \nu \leq n$). Aus einer Formel von Siegel [*Math. Ann.* 87, 36—38, Formel (5) (1922)] kann man folgern: Für $0 < \lambda < 1$ und positive t_ν ist

$$|\Delta| (1 + \omega(t_1, \dots, t_n)) > t_1 \dots t_n \left(1 + \left(\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi} \right)^{2n} \Omega \left(\frac{\lambda}{t_1}, \dots, \frac{\lambda}{t_n} \right) \right).$$

Wegen $\Omega \geq 0$ enthält diese Ungleichung den Minkowskischen Linearformensatz; kennt man aber eine positive untere Schranke für Ω , so bekommt man schärfere Resultate. Als Beispiel wird der Khintchinesche „Übertragungssatz“ bewiesen (übrigens hat Mahler diesen Satz auch mit Hilfe des gewöhnlichen Minkowskischen Satzes bewiesen, vgl. dies. *Zbl.* 16, 155).

Jarník (Praha).

Fenchel, Werner: Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen. *Acta Arithmet.* 2, 230—241 (1937).

Es wird ein von Blichfeldt [*Trans. Amer. Math. Soc.* 15, 227—235 (1914)] mittels des Schubfachprinzips bewiesener Satz verschärft zu: Sei \mathfrak{M} eine Menge der Dichte $\geq \varrho > 0$ im R_n und \mathfrak{R} eine Menge vom äußeren Inhalt V im R_n . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Translation T derart, daß die Menge $T\mathfrak{R}_\varepsilon$ mehr als $V\varrho$ Punkte von \mathfrak{M} enthält. Dabei bedeutet \mathfrak{R}_ε die ε -Umgebung von \mathfrak{R} . Ferner bedeutet die Aussage, daß die Dichte von \mathfrak{M} größer oder gleich ϱ ist, daß es zu jedem $\eta > 0$ achsenparallele Würfel W beliebig großer Kantenlänge l derart gibt, daß die Anzahl N der im Innern eines solchen Würfels gelegenen Punkte von \mathfrak{M} größer als $(\varrho - \eta)l^n$ ist. — Ähnlich wie beim Blichfeldtschen Satz kann man, wie Verf. zeigt, unter zusätzlichen

Bedingungen die Aussage dieses Satzes noch etwas verschärfen. Am Schluß der Arbeit gibt Verf. noch eine von B. Jessen herrührende Verallgemeinerung des obigen Satzes. \mathfrak{M} habe die obige Bedeutung, \mathfrak{R} sei eine beliebige meßbare Menge vom Maß $> V$. Dann gibt es eine Translation T , derart, daß $T\mathfrak{R}$ mehr als VQ Punkte von \mathfrak{M} enthält. — In den obigen Sätzen ist nicht nur der Minkowskische Satz enthalten, daß jeder konvexe Körper mit Mittelpunkt O und Inhalt $V > 2^n$ in R_n ($n \geq 2$) wenigstens einen Gitterpunkt $\neq O$ enthält, sondern auch die Mordell-van der Corputschen Verallgemeinerungen. — Verf. zeigt weiter, daß seine Sätze Verallgemeinerungen z. B. des Minkowskischen Linearformensatzes und ähnlicher Sätze zulassen in dem Sinne, daß die üblichen Behauptungen über ganzzahlige Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n ersetzt werden durch Behauptungen über Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n , wo die x_v Differenzen der Zahlen einer vorgegebenen Folge natürlicher Zahlen von positiver Dichte sind. In die Schranken geht selbstverständlich diese Dichte ein. Lit. im Bericht des Ref.: Diophantische Approximationen. Erg. d. Math. IV, 4, Kap. II. Berlin: Julius Springer 1936. J. F. Koksma.

Blumer, Fritz: Über das Wachstum der Näherungsnenner halbbregelmäßiger Kettenbrüche. (Untersuchungen zur Theorie der halbbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen. III.) Comment. math. helv. 10, 97—109 (1937).

Für die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ jedes sogenannten T -Kettenbruchs

$$\xi = a_0 - \frac{\varepsilon_1}{|a_1|} - \frac{\varepsilon_2}{|a_2|} - \dots \quad \left. \begin{array}{l} (a_0 \text{ reell, } a_n \geq 1 \text{ reell, } \varepsilon_n = \pm 1, a_n - \varepsilon_{n+1} \geq 1) \\ \text{alles für } n \geq 1; \text{ unendlich oft } a_n - \varepsilon_{n+1} \geq 2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

gilt nach Tietze (spätere Beweise von Perron und Pipping):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty.$$

Das wird vom Verf. neu bewiesen. Der Index $n \geq 1$ heiße singulär, falls $a_n < 2$, $\varepsilon_n = -1$, $n > 1$ ist, und sonst regulär. Die Folge $n = 1, 2, \dots$ zerfällt dementsprechend in zwei Teilfolgen: s_1, s_2, \dots und $r_1 (=1), r_2, \dots$. Verf. zeigt dann $Q_{r_k} \rightarrow \infty$ (monoton) mit $s_k \rightarrow \infty$, was von Pipping bewiesen war für halbbregelmäßige Kettenbrüche [man lese dann in (1) „ganz“ statt „reell“]. In diesem letzten Fall zeigt Verf. überdies

$$\frac{Q_{r_k}}{r_k} \rightarrow \infty \quad \text{für } r_k \rightarrow \infty,$$

und er zeigt, daß sich diese beiden Wachstumsaussagen nicht verschärfen lassen. Lit.: Dies. Zbl. 17, 248 (Teil III ist unabhängig von I und II); Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1929²; Pipping, Die Konvergenz der halbbregelmäßigen Kettenbrüche, Acta Acad. Åboens. 1922. (II. vgl. dies. Zbl. 17, 248.) J. F. Koksma.

Corput, J. G. van der: Sur la méthode de Weyl dans la théorie des nombres. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 756—763 (1937).

Es wird folgender Satz bewiesen, der für $H = 1$ mit einem Satz von Vinogradow [Bull. Acad. Sci. URSS (6) 21, 567—578 (1927)] übereinstimmt: Zu jedem ganzen $k \geq 2$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $c = c(k, \varepsilon) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $f(x) = \frac{\alpha}{k!} x^k + \dots$ ein reelles Polynom vom Grade k , α irrational, $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{q^2}$, $q > 0$, $(a, q) = 1$, $\sigma \geq 1$, P, H, X ganz, $H > 0$, $X > 0$, $\kappa = 2^k$, so ist

$$\sum_{h=1}^H \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i h f(x)} \right| < c(HX)^{1+\varepsilon} (H^{-1}X^{1-k} + q^{-1})^{\frac{2}{\kappa}} (\sigma + qX^{-1})^{\frac{2}{\kappa}}.$$

Zum Beweis wird die in der I. Mitteilung bewiesene „Première inégalité fondamentale généralisée“ (dies. Zbl. 17, 248, 1. bis 12. Zeile) herangezogen. Jarník (Praha).

Maass, H.: Konstruktion ganzer Modulformen halbzahligter Dimension mit \mathfrak{D} -Multiplikatoren in einer und zwei Variablen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 133—162 (1938).

Diese Arbeit stellt einen Beitrag zur Peterssonschen Theorie der automorphen Formen reeller Dimension dar. Verf. behandelt die Konstruktion von Formen mit

ϑ -Multiplikatoren für die Dimensionen $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ und liefert insofern eine Ergänzung der Petersson'schen Arbeiten, als dort die Dimensionen $-\tau \geq -2$ nicht systematisch erfaßt werden. Er untersucht zunächst die Partialbruchreihen für die k -ten Potenzen des ϑ -Nullwertes ($k = 1, 3, 5, 7$). Hierzu zieht er das Verhalten von $\vartheta_{00}(\tau)$ in den rationalen Punkten heran und gelangt zu den Reihen

$$\varphi_{-\frac{k}{2}}(\tau; s) = 1 + \sum_{(c,d)} \frac{A_k(c,d)}{(c\tau + d)^{k/2} |c\tau + d|}, \text{ mit gewissen Summationsbedingungen für } c, d$$

und genau bestimmten Koeffizienten $A_k(c, d)$. Diese Reihen mit der Hilfsvariablen s sind bei $\operatorname{Re} s > 2 - \frac{k}{2}$ absolut konvergent und stellen für $k \geq 5$ und $s = 0$ Modulformen in τ dar. Für $k = 1, 3$ ist eine analytische Fortsetzung der $\varphi_{-\frac{k}{2}}(\tau; s)$ als Funktion

von s bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ notwendig. Diese Fortsetzung wird vorgenommen und liefert für den Fall $k = 3$, der vollständig durchgeführt wird, die

$$\text{Entwicklung } \varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau; 0) = 1 + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0, \frac{3}{2}) n^{\frac{1}{2}} e^{\pi i \tau n} \text{ mit übersichtlichen Koeffi-}$$

zienten T_n . Auf Grund der Petersson'schen Theorie ist $\varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0) = \vartheta_{00}^3(\tau)$. Damit ist erneut der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von drei Quadraten und der Klassenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{-n})$ hergeleitet. Die gleichen Methoden führen zu Darstellungssätzen bei einer Reihe von definiten Formen der Gestalt $Q = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$. Die den $\varphi_{-\frac{k}{2}}(\tau; s)$ entsprechenden Funktionen $F(Q; \tau, s)$ erweisen sich für $s = 0$ als

ganze Modulformen, wenn $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ und α_i quadratfrei. Diese Formen sind nur zum Teil mit den zugehörigen $\vartheta(Q; \tau)$ identisch. Verf. gibt insgesamt zehn bestehende Identitäten an. Aus diesen ergibt sich die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n durch die Form Q in einer Gestalt, welche die Zahl der Einheitswurzeln und die Klassenzahl des Körpers $R(\sqrt{-\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 n})$ enthält. Dann werden noch die von Petersson aufgestellten Eisensteinreihen der Dimension $-\frac{3}{2}$ zur Stufe $N \equiv 0(4)$ untersucht. Diese werden als in τ nichtanalytische Funktionen nachgewiesen. In der von ihnen erzeugten linearen Schar ist eine für die Modulgruppe invariante Teilschar von mindestens N (wenn nicht $N = 4, 8, 12, 24$) unabhängigen Formen enthalten.

Bruno Schoeneberg (Hamburg)

Gruppentheorie.

● Zassenhaus, H.: *Lehrbuch der Gruppentheorie*. Bd. 1. (Hamburg. math. Einzelschriften H. 21.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1937. VI, 152 S. RM. 4.—.

In dieser Darstellung der Gruppentheorie finden eine Reihe neuerer gruppentheoretischer Resultate zum ersten Male Aufnahme in die Lehrbuchliteratur. Bei verschiedenen Beweisen sind Vereinfachungen erzielt worden; an vielen Stellen werden bekannte Sätze durch neue Bemerkungen ergänzt. Zahlreiche Aufgaben steigern den Wert des Buches noch weiter. Im einzelnen ist der Inhalt folgendermaßen gegliedert: I. Elemente der Gruppentheorie: Grundlagen, ferner u. a. eine Aufstellung der dreidimensionalen endlichen Drehungsgruppen, ein Beweis für den Frobeniusschen Satz für die Anzahl der Gruppenelemente, deren n -te Potenz in einer festen Klasse konjugierter Elemente liegt. II. Homomorphiebegriff und Gruppen mit Operatoren: Homomorphismen und Operatoren, Darstellung einer Gruppe durch Permutationen, Automorphismen und Holomorph, der Jordan-Hölder-Schreiersche Satz, Kommutatorgruppen und die Hallschen Kommutatorformen, eine Übersicht über die verschiedenen mit der Gruppentheorie in Verbindung stehenden Begriffsbildungen der Algebra wie Ringe, Schiefkörper, Körper, Fastkörper usw. III. Konstruktion und Struktur zusammengesetzter Gruppen: Direkte Produkte, Abelsche Gruppen, die Schreiersche Erweiterungstheorie, der Artinsche Satz von der Existenz von Zerfällungsgruppen im Fall eines Abelschen Normalteilers. IV. p -Sylowgruppen und p -Gruppen: Die Sylowschen Sätze und weitere Sätze aus diesem Ideenkreis, p -Gruppen, Sätze von Hall, Hamiltonsche Gruppen, Sätze über endliche Gruppen, die einen Normalteiler \mathfrak{N} von einer zum Index von \mathfrak{N} teilerfremden Ordnung be-

sitzen. V. Verlagerung in eine Untergruppe: Verlagerung, Satz von Burnside über Sylowgruppen, die im Zentrum ihres Normalisators liegen, Sätze von Grün über die Verlagerung einer Gruppe in eine Sylowgruppe, das gruppentheoretische Äquivalent des Hauptidealsatzes. — Im letzten Abschnitt wäre es vielleicht wünschenswert gewesen, wenn an Stelle des Burnside'schen Satzes der allgemeinere Frobeniussche Satz gegeben worden wäre; der von I. Schur (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1902, 1013) für diesen Satz gegebene Beweis arbeitet mit derselben Methode, und diese Schursche Arbeit ist wohl die erste Stelle, wo sich der Begriff der „Veralgerung“ findet. *R. Brauer* (Toronto).

Hall, P.: On the system normalizers of a soluble group. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 507—528 (1937).

Mit Hilfe der früher vom Autor gefundenen Sätze [J. London Math. Soc. 3, 98—105 (1928); 12, 198—200 u. 201—204 (1937); Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 316—323 (1937); zitiert mit I—IV; für II—IV s. dies. Zbl. 16, 392, 393; 17, 154] werden nun die Durchschnitte M der sämtlichen Normalisatoren der zu einem Sylowsystem (s. IV) einer auflösbaren Gruppe G gehörigen Untergruppen von G eingehend untersucht. Eine Untergruppe M heiße ein „Systemnormalisator“ der auflösbaren Gruppe G ; alle Systemnormalisatoren von G sind in G konjugiert; dann und nur dann ist eine Untergruppe M ein Systemnormalisator, wenn es eine Kette $M, M_1, \dots, M_{l-1}, G$ von Untergruppen von G gibt, deren jede in der folgenden als maximale, aber nichtinvariante Untergruppe enthalten ist, und wenn M keine echte Untergruppe mit derselben Eigenschaft besitzt. — Enthält der Normalteiler H den Normalteiler K von G , so werde der Zentralisator von H/K in G definiert als die Gesamtheit der Elemente x von G , durch die bei Transformation von H mit x in H/K der identische Automorphismus induziert wird. Ist dieser Zentralisator gleich G , so heiße H/G ein zentraler Faktor von G . Gibt es eine H und K verbindende Hauptreihe $H, H_1, \dots, H_{r-1}, K$ von G , so daß die „Hauptfaktoren“ $H/H_1, \dots, H_{r-1}/K$ sämtlich zentrale Faktoren von G sind, so heißt H/K ein hyperzentraler Faktor von G ; ist eine der Faktorgruppen H/H_1 usw. nicht zentral in G , so heißt sie exzentrischer Hauptfaktor von G ; sind alle Faktorgruppen H/H_1 usw. nicht zentral in G , so heißt H/K ein hyperexzentrischer Faktor von G . Das Hyperzentrum von G ist der größte Normalteiler H_0 von G mit der Eigenschaft, daß $H_0/1$ hyperzentral in G ist. Man sagt, eine Untergruppe L von G decke bzw. meide die Faktorgruppe H/K , je nachdem, ob alle oder keine der von K verschiedenen Nebengruppen von K in H ein Element von L enthalten. Nun gilt: Jeder Systemnormalisator von G meidet jeden hyperexzentrischen Faktor und deckt jeden hyperzentralen Faktor von G . Die Ordnung eines jeden Systemnormalisators ist gleich dem Produkt der Ordnungen der zentralen Hauptfaktoren, die in einer beliebig vorgegebenen Hauptreihe von G auftreten; die Anzahl der Sylowsysteme von G ist gleich dem Produkt der Ordnungen der in einer Hauptreihe auftretenden exzentrischen Hauptfaktoren. — In jeder endlichen Gruppe ist das Hyperzentrum der Durchschnitt der Normalisatoren aller Sylowgruppen und zugleich der Durchschnitt aller Untergruppen, die ihr eigener Normalisator sind. Für zahlreiche weitere Resultate muß auf die Arbeit selber verwiesen werden. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Turkin, W. K.: Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen. Rec. math. Moscou n. s. 2, 1011—1015 (1937).

Beweis der früher unter dem gleichen Titel (s. dies. Zbl. 15, 101) mitgeteilten Resultate. In dem Referat soll es in Zeile 5 heißen: $\mathfrak{N}_A^{(4)} \neq \mathfrak{N}_A^{(4+1)}$. *Magnus*.

Kulakoff, A.: Über die reguläre Darstellung einer abstrakten Gruppe. II. Rec. math. Moscou n. s. 2, 1003—1006 (1937).

Fortführung und Ergänzung der früher (s. dies. Zbl. 17, 155) unter demselben Titel begonnenen Untersuchungen. Der Autor zeigt u. a. an Beispielen, daß sich in der regulären Darstellung einer Gruppe G der Ordnung g die Ziffern der in Zyklen zerlegten Permutationen für die erzeugenden Substitutionen von G so anordnen lassen, daß sie gewisse arithmetische Progressionen mod g bilden. *Magnus*.

Miller, G. A.: Groups whose commutator subgroups are of order two. Amer. J. Math. 60, 101—106 (1938).

Eingehende Untersuchung der direkt unzerlegbaren endlichen Gruppen G mit einer Kommutatorgruppe der Ordnung 2. Unter anderem gilt: Die Ordnung von G muß eine Potenz von 2 sein; es gibt Gruppen G , deren Zentrum eine beliebig vorgeschriebene abelsche Gruppe (mit einer Potenz von 2 als Ordnung) ist *Magnus*.

Miller, G. A.: Groups having a maximum number set of independent generators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 17—20 (1938).

Fortführung und Ergänzung der früher (s. dies. Zbl. 16, 393) begonnenen Untersuchungen des Autors. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Kurosch, Alexander: Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte. Rec. math. Moscou n. s. 2, 995—1001 (1937).

Der Autor zeigt, daß die Gruppe mit den abzählbar vielen Erzeugenden a_0, a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots und den definierenden Relationen $a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = a_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) sich nicht in ein freies Produkt von (endlich oder unendlich vielen) frei unzerlegbaren Faktoren zerlegen läßt, obwohl sie frei zerlegbar ist. Der Beweis beruht auf dem Hilfssatz: Ist die Gruppe G freies Produkt der Gruppen H_1 und H_2 , und liegt der Kommutator $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ zweier Elemente von G in H_1 , ohne daß g_1 und g_2 vertauschbar sind, so gehören sowohl g_1 wie g_2 der Gruppe H_1 an. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Fomin, S.: Über periodische Untergruppen der unendlichen Abelschen Gruppen. Rec. math. Moscou 44, 1007—1009 (1937).

Einige wichtige Spezialfälle von Sätzen von R. Baer (dies. Zbl. 15, 202) werden in einfacher Weise abgeleitet. Es gilt: Ist G eine abelsche Gruppe und A die von den Elementen endlicher Ordnung gebildete Untergruppe von G , so ist A stets dann direkter Summand von G , wenn die Ordnungen der Elemente von A beschränkt sind. Zugleich wird ein einfaches Beispiel einer Gruppe G gegeben, in der A kein direkter Summand ist. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Stams, Walther: MacMahon-Spiel und symmetrische Gruppe S_6 . Deutsche Math. 2, 691—697 (1937).

Hat man sechs Farben zum Bemalen der Seitenflächen eines Würfels, so kann man dies auf $6! : 4! = 30$ verschiedene Arten ausführen, wodurch man die 30 Würfel des Spieles von MacMahon erhält. Es wird gezeigt, wie ein einzelner Würfel die Tetraedergruppe repräsentiert und wie alle 30 Würfel die symmetrische Gruppe S_6 von sechs Elementen darstellen. Spiegelt man einen Würfel an einer seiner Flächen, so erhält man einen Doppelstein, von denen es 15 Paare gibt, deren jedes 48 Doppelsteine erzeugt, wodurch wir nochmals $15 \cdot 48 = 6!$ Substitutionen und somit nochmals die S_6 erhalten. Betrachtet man die fünf Würfel des Dodekaeders als Sternpolyeder und färbt jeden Würfel nach obiger Art, so kann man fragen, wieviel verschiedene Ausführungen des Sternpolyeders möglich sind. *J. J. Burckhardt*.

Schaacke, Ingeburg: Zwillingsbildung als gittergeometrisch-zahlentheoretisches Problem mit Anwendung auf einige reale Fälle. III. Z. Kristallogr. A 98, 281—298 (1937).

Als Anwendung der in I und II (dies. Zbl. 17, 392) gefundenen Gesetzmäßigkeiten werden die Penetrationszwillinge des Flußspates [Zwilling 3. Ordnung nach (111)] und des Pyrites [Eisernes Kreuz, Zwilling 1. Ordnung nach (110)] behandelt. *Nowacki*.

Analysis.

Germary, R. H.: Remarques sur la théorie des fonctions implicites. Mathesis 51, 456—464 (1937).

Eine Variante des klassischen Beweises für die Existenz der impliziten Funktionen z_j , definiert durch $F_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p) = 0$, $j = 1, \dots, p$. Die Reihen-

entwicklung der z_j wird nicht, wie üblich, durch Einsetzen in die Entwicklung der F_j bestimmt, sondern induktiv durch partielle Differentiation der F_j . *Rogosinski.*

Hille, Einar, G. Szegö and J. D. Tamarkin: On some generalizations of a theorem of A. Markoff. *Duke math. J.* 3, 729—739 (1937).

Die Verf. beweisen folgenden Satz: Es sei $p \geq 1$ und $f(x)$ ein Polynom genau n -ten Grades der reellen Variablen x mit beliebigen Koeffizienten. Dann ist

$$\left\{ \int_{-1}^{+1} |f'(x)|^p dx \right\}^{1/p} : \left\{ \int_{-1}^{+1} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq A n^2, \quad (1)$$

wo A nur von p , nicht aber von $f(x)$ und n abhängt. — Für jedes n gibt es ferner Polynome $f(x)$, für welche die linke Seite der Ungleichung (1) $\geq B n^2$ ist, so daß n^2 die bestmögliche Ordnung der oberen Schranke in (1) ist. Hier ist B wieder eine nur von p , nicht aber von $f(x)$ und n abhängige Zahl. — Wenn $p \rightarrow \infty$, so ergibt sich aus (1) der von Markoff (mit $A = 1$ statt $A = 2e$ und \leq statt $<$) bewiesene Satz:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)| < 2e n^2 \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Der Fall $p = 2$ ist von E. Schmidt betrachtet worden. Das analoge Problem für trigonometrische Polynome hat (sogar in einem weitgehend allgemeineren Fall) A. Zygmund gelöst (dies. Zbl. 5, 353).

T. Ridder (s'Gravenhage).

Hartman, Philip, and Richard Kershner: The structure of monotone functions. *Amer. J. Math.* 59, 809—822 (1937).

Let $y = f(x)$ be continuous and strictly increasing in the closed interval $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; $f(k/2^n) = y_n^k$ ($k = 0, 1, \dots, 2^n$; $n = 0, 1, \dots$). The set $R = \{y_n^k\}$ is dense in $[0, 1]$ and defines $f(x)$ uniquely. The object of this paper is a comprehensive investigation of the Lebesgue properties of $f(x)$ [absolute continuity (a. c.), pure singularity (p. s.), or mixed behavior (m. b.)] directly in terms of properties of the determining set R . If y ($0 < y < 1$) is not a point of R , denote (for every n) by $\gamma_n(y)$ the interval (y_n^k, y_n^{k+1}) which contains y ; the same symbol $\gamma_n(y)$ is used to denote its length. Finally let

$$\varepsilon_n(y) = \{\gamma_{n+1}(y) - (\gamma_n(y) - \gamma_{n+1}(y))\} / \gamma_n(y) = 2\gamma_{n+1}(y) / \gamma_n(y) - 1.$$

$\varepsilon_n(y)$ is a step function defined and constant inside each of the intervals $(y_n^{k+1}, y_{n+1}^{k+1})$; moreover $|\varepsilon_n(y)| < 1$. By an extension of partly familiar arguments [Rademacher, *Math. Z.* 2 (1918)] the following Theorem I is established: $y = f(x)$ is p. s., of m. b.,

or a. c., according as the set of points y for which $\prod_{n=0}^{\infty} \{1 + \varepsilon_n(y)\}$ diverges (also to zero)

is of measure one, of fractional measure, or of measure zero. This already furnishes a useful criterion of pure singularity: Denote by $\varrho_n(y) = (1 - |\varepsilon_n(y)|) / (1 + |\varepsilon_n(y)|)$ the ratio ≤ 1 into which $\gamma_n(y) = (y_n^k, y_n^{k+1})$ is divided by y_{n+1}^{k+1} . If $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(y)$

is < 1 almost everywhere, then $y = f(x)$ is p. s. This is applied to show that a monotone function considered by Minkowski (*Werke*, II, p. 43) is p. s. It also shows the p. s. of functions investigated by Faber and Rademacher (loc. cit.) if these are constructed on the basis of binary expansions. Particularly complete results are obtained in the case of sets R which the authors call symmetric: R is symmetric if $\varrho_n(y)$, that is $|\varepsilon_n(y)| = \varepsilon_n$, is independent of y . The chief result of the paper is Theorem III: If R is symmetric, then $y = f(x)$, as well as $x = f^{-1}(y)$, are p. s. or a. c. according

as $\sum_0^{\infty} \varepsilon_n^2$ is divergent or convergent. The proof is partly based on a theorem of Khint-

chine and Kolmogoroff giving conditions for convergence (divergence) almost everywhere (in the sense of Steinhaus) of the series $\sum \log(1 \pm \varepsilon_n)$. As application an example is given of an a. c. function which is not monotone in any interval (other perhaps more "natural" examples of this behavior can readily be exhibited as the Ref. may show elsewhere). It is further shown that nothing short of a Lipschitz con-

dition of order 1 insures a. c. of a strictly increasing continuous function. Finally certain functions with symmetric sets R are obtained as infinite convolutions of the Poisson type for which it is completely decided whether they are purely discontinuous or continuous, purely singular or absolutely continuous. *I. J. Schoenberg.*

Young, L. C.: Inequalities connected with bounded p -th power variation in the Wiener sense and with integrated Lipschitz conditions. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 449—467 (1937).

The central result of the paper is as follows. Let $r > 1$, $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q - 1 = 1/\lambda_0 > 0$, $\mu > \mu_0 = r\lambda_0/p$. Let A_1^r, A_2^p, B^q, C^μ be respectively the upper bounds of the sums $\sum_{i=1}^N |f(x_i, y) - f(x_{i-1}, y)|^r$, $\sum_{j=1}^M |f(x, y_j) - f(x, y_{j-1})|^p$, $\sum_{j=1}^M |g(y_j) - g(y_{j-1})|^q$, $\sum_{i=1}^N |S(x_i) - S(x_{i-1})|^\mu$ where $S(x) = \int_0^1 f(x, y) dg(y)$ and $f(x, y), g(y)$ are of period 1 in y . Then there exists a constant $K = K(\mu, p, q, r) < \infty$ such that $C \leq K A_1^{1/(r\lambda_0)} A_2^{1-1/(r\lambda_0)} B$. The following lemma plays an important role in the proof. If $p > 1$, $f(x)$ is of period 1 and satisfies the condition $\int_0^1 |f[\varphi(t+h)] - f[\varphi(t)]| dt \leq Ah^{1/p}$ for every monotonic function $\varphi(t)$ such that $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$, A independent of φ , then $V_{p+\varepsilon}(f) \leq K(p, \varepsilon)A$ where $V_q(f)$ is the " q -th variation" of $f(x)$. Among other results of the paper we mention the following. Let $f(x)$ be periodic, of period 1,

$$S_\nu(x) = 2^\nu \int_0^1 [f(x+t) - f(x+t+2^{-\nu})] g(t) dt.$$

If $p > 1$, $q > 1$, $\lambda < 1$, $1/\lambda \geq 1/p + 1/q - 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$, $0 < h < 1$, and if $\left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq Ah^\alpha$, $\left(\int_0^1 |g(x+h) - g(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq Bh^\beta$ then there exists a function $S(x)$ such that $\int_0^1 |S_\nu(x) - S(x)|^2 dx \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow \infty$, and we have $\left(\int_0^1 |S(x+h) - S(x)|^{1/\lambda} dx\right)^{1/\lambda} \leq K(\alpha, \beta) ABh^{\alpha+\beta-1}$. If, in addition, $1/p + 1/q \leq 1$ then $S_\nu(x) \rightarrow S(x)$ uniformly and then $|S(x+h) - S(x)| \leq KABh^{\alpha+\beta+1}$. Results of analogous nature are obtained for double integrals $\int \int f(x, y) dg(x, y)$ in Fréchet sense. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Latshaw, V. V.: On fourth order self-adjoint difference systems. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 851—855 (1937).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Sewell, W. E.: On the polynomial derivative constant for an ellipse. Amer. Math. Monthly 44, 577—578 (1937).

Let C be an ellipse with semi-axes a and b , $a \geq b$. If $P_n(z)$ is a polynomial of degree n ,

$$\max_C |P'_n(z)| \leq b^{-1}n \cdot \max_C |P_n(z)|.$$

This result follows readily from S. Bernstein's theorem. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Achyeser, N.: Über die beste Annäherung einer Klasse stetiger periodischer Funktionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 455—457 (1937).

Considérons les opérateurs:

$$L = (D^2 + \alpha_1)(D^2 + \alpha_2) \dots (D^2 + \alpha_r), \quad \left(D = \frac{d}{dt}; \text{ les } \alpha \text{ désignent des nombres réels}\right. \\ M = D(D^2 + \alpha_1) \dots (D^2 + \alpha_r), \quad \left. \text{différents et différents de zéro dans } M\right).$$

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période 2π , soit n un entier tel que

$$n^2 > \text{Max}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$$

posons:

$$\omega(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_r); \quad \Omega(z) = z(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_r).$$

1° Si $L[x]$ est presque-partout ≤ 1 , on peut approcher $x(t)$ par un polynome trigonométrique d'ordre inférieur à n avec une erreur ne dépassant pas:

$$\left| \sum_{k=1}^r \frac{1}{\alpha_k \omega'(\alpha_k)} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\pi \sqrt{\alpha_k}}{4n}}{\cos \frac{\pi \sqrt{\alpha_k}}{2n}} \right|$$

2° Si $M[x]$ est presque-partout ≤ 1 , l'erreur, dans les mêmes conditions, ne dépassera pas:

$$\left| \sum_{k=0}^r \frac{1}{\sqrt{\alpha_k} \Omega'(\alpha_k)} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \sqrt{\alpha_k}}{2n} \right|$$

les limites peuvent d'ailleurs être atteintes. — Des considérations analogues peuvent être développées si les α ne sont pas tous différents et, comme cas limites, on obtient les inégalités du Ref. (ce Zbl. 16, 59) trouvées également, et indépendamment, par Mrs. Achyesser et Krein (ce Zbl. 16, 300). *J. Favard* (Grenoble).

Bernstein, Serge: Sur la meilleure approximation des fonctions non régulières. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 825—827 (1937).

The author obtains a more precise and more general form of some of his former results concerning the best approximation $E_n(f)$ of a preassigned function $f(x)$, $-1 \leq x \leq +1$, by polynomials of degree n . The results which are discussed in the present short communication, are of the following kind. Let $p > 0$; then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n\{|x|^p\} = \pi^{-1} \left| \sin \frac{p\pi}{2} \right| L(p)$$

exists, and $L(p)$ is the best approximation of

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} \left\{ \frac{(t^2 - u^2) \cos t + 2ut \sin t}{t^2 + u^2} \right\} du, \quad -\infty < t < +\infty$$

by integral functions of genus 1 and of type 1. A function $\sum_{n=0}^\infty c_n t^n$ is called of the type 1 if $\limsup |n! c_n|^{1/n} = 1$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Sakurai, Tokio: Some theorems concerning the approximation of function. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 609—649 (1937).

The author gives a direct discussion of the expansion of an arbitrary function in terms of the derivatives of Legendre polynomials $P_n(x)$, provided x is confined to an interval in the interior of $[-1, +1]$. To this purpose he develops an asymptotic formula of the derivatives in question and applies it in the usual way. — These results can not be considered as essentially new, from the following reason. The r -th derivative of $P_n(x)$ is, up to a constant factor, identical with the Jacobi polynomial $P_{n-r}^{\sigma, \tau}(x)$, so that the equiconvergence theorem for Jacobi polynomials (Szegő, Schr. Königsberg. gel. Ges. 1933; this Zbl. 7, 203) leads immediately to the desired results. The paper contains a number of mistakes and misprints. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Ottaviani, Giuseppe: Sulla convergenza e sommabilità delle serie di Hermite: Disuguaglianze fondamentali per i polinomi di Laguerre ed Hermite. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 1—23 (1938).

Dans ce travail important l'A. trouve des inégalités nouvelles pour les polynômes $L_n^{(\alpha)}(x)$ de Laguerre. Comme on sait Fejér [Mat. természett. Értes. 27, 1—33

(1909)] a démontré la relation (1) $L_n^{(\alpha)}(x) = O \left[\frac{e^{\frac{x}{\delta}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{n}{x} \right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \right]$, $0 < a < x < A$, A fini.

Perron [J. reine angew. Math. 151, 63—78 (1921)] a démontré que (1) est valable pour $0 < a < x < n^\delta$, $\delta < \frac{1}{3}$, et Kogbetliantz (Ann. École norm. 1932; ce Zbl. 5, 157) a montré qu'elle est vraie pour $0 < a < x < kn$, k étant fini. L'A. démontre que

l'inégalité (1) est valable seulement pour $\frac{1}{O(n)} < x \leq kn$ ($k < 4$) si $\alpha \geq -1$ et dans $0 < a < x \leq kn$ si $\alpha < -1$, en corrigeant ainsi le résultat de Kogbetliantz. Ensuite il obtient la formule asymptotique

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x}{4n}\right)^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left(\psi - \frac{\alpha'\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left[(nx)^{-\frac{1}{12}} \left(1 - \frac{x}{4n}\right)^{-\frac{1}{4}}\right] \right\},$$

où $\psi = \sqrt{n_1} \sqrt{1 - \frac{x}{4n_1}} + 2n_1 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{n_1}}$, $n_1 = n + \frac{\alpha+1}{2}$, $\alpha \geq -1$, valable pour $\frac{1}{O(n)} \leq x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{1/3})}\right)$. Il déduit d'ici l'inégalité pour le cas $x \rightarrow 4n$,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x}{4n}\right)^{-\frac{1}{4}}\right], \quad \frac{1}{O(n)} \leq x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right),$$

si $\alpha \geq -1$, $a \leq x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right)$,

si $\alpha < -1$, et pour $4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right) < x < 4n \left(1 + \frac{1}{O(n^{2/3})}\right)$ il obtient $L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}} n^{-\frac{1}{3}}\right)$;

pour $4n \left(1 + \frac{1}{O(n^{2/3})}\right) < x < k_1 n$, $4 < k_1 < 6$, $L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x - 4n}\right)$, et enfin pour $x > k_1 n$, $k_1 > 4$, $L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}(1-\varepsilon)}\right)$, $\varepsilon > 0$. N. Obrechhoff (Sofia).

Ottaviani, G.: Sul fenomeno di Gibbs nello sviluppo in serie di polinomi di Hermite. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 159—182 (1937).

Kogbetliantz (Ann. École norm. 1932; ce Zbl. 5, 157) a démontré que le phénomène de Gibbs des moyennes (C, δ) de Cesàro de la série d'Hermite ne disparaît pas quelque soit le nombre $\delta \geq 0$. L'A. donne pour le segment $l(\delta)$ de ce phénomène

la formule $l(\delta) = \max \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right)^\delta \frac{\sin u}{u} du - 1 \right]$, $0 < \alpha < \infty$ et montre que la formule de Kogbetliantz pour $l(\delta)$ n'est pas complètement correcte. La même remarque a été faite par Jacob [C. R. 204, 1540 (1937); ce Zbl. 16, 398]. Pour les moyennes simples du poids $n^{-\alpha}$ l'A. démontre que le phénomène de Gibbs se présente si $\alpha \leq \bar{\alpha}$, mais disparaît pour $\alpha > \bar{\alpha}$, où $\bar{\alpha} = 0,2489 \dots$ est le plus petit zéro positif de la fonction

$\int_0^{\bar{a}} t^{1-2\alpha} \sin t dt$, \bar{a} étant le zéro de la fonction $\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt = 1$, qui se trouve dans

l'intervalle $(\pi, 2\pi)$. Le résultat pour $\alpha = \frac{1}{2}$ a été trouvé auparavant par Jacob [Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 1—12 (1935); ce Zbl. 11, 213]. N. Obrechhoff (Sofia).

Jacob, M.: Sul fenomeno di Gibbs nello sviluppo in serie di polinomi di Hermite. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 297—302 (1937).

Ottaviani (cf. ref. préc.) a ramené l'étude du phénomène de Gibbs pour les moyennes (C, δ) de Cesàro de la série d'Hermite à la question de détermination

du maximum de l'intégrale $j = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right)^\delta \frac{\sin u}{u} du$. Par des simples calculs l'A.

démontre le résultat suivant: désignons par $\zeta_{\delta 1}, \zeta_{\delta 2}, \dots$ les zéros positifs de la fonction de Bessel $i_{\delta+\frac{1}{2}}(\zeta)$ rangés par ordre de la grandeur croissante. Alors on a

$$\max j = \frac{2^{\delta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\delta+1) \int_0^{\zeta_{\delta 1}} \zeta^{-\delta-\frac{1}{2}} i_{\delta+\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta, \quad \min j = \frac{2^{\delta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\delta+1) \int_0^{\zeta_{\delta 2}} \zeta^{-\delta-\frac{1}{2}} i_{\delta+\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta.$$

N. Obrechhoff (Sofia).

Reihen:

● **Ferrar, W. L.:** *A text-book of convergence.* Oxford: Clarendon press 1938. VI, 192 pag. bound 10/6.

Die Elemente der Reihenlehre sind in klarer und einwandfreier Form dargestellt. Auf feinere Einzelheiten wird bewußt nicht eingegangen. Die Darstellung umfaßt die üblichen Konvergenzkriterien, das Rechnen mit Grenzwerten und Reihen, Doppelreihen und unendliche Produkte, den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und Kriterien für Grenzwertvertauschung sowie einiges über Potenzreihen und Fourierreihen. Der Stoff ist durchweg von Beispielen und Aufgaben begleitet. Im allgemeinen werden nur reelle Reihen betrachtet. In einem Anhang wird die reelle Zahl als Dedekindscher Schnitt eingeführt, um die im Text als „Annahmen“ benutzten Eigenschaften der reellen Zahlen sicherzustellen.

Rogosinski (Cambridge).

Hill, J. D.: *On perfect methods of summability.* Duke math. J. 3, 702—714 (1937).

A triangular matrix $A = \{a_{nk}\}$ ($k, n = 0, 1, 2, \dots$; $a_{nk} = 0$ for $k > n$) is said to be normal if $a_{nn} \neq 0$ ($n = 0, 1, \dots$); A is said to be regular if every convergent sequence is summable A , to the same limit. The matrix A is said to be of type M , if the conditions $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_{nk} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) always imply $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = 0$.

If A is simultaneously regular, normal, and of type M , then A is said to be perfect. The notion of perfect methods may be extended to general, not necessarily triangular, matrices $\{a_{nk}\}$ (we omit the definition). The importance of perfect methods lies in the following theorems: (A) In order that a normal regular method A be consistent with every regular method not weaker than A , it is necessary and sufficient that A be of type M [Mazur, *Studia Math.* 2, 40—50 (1930)]. (B) In order that A be consistent with every regular method not weaker than A , it is sufficient that A be perfect (Banach, *Théorie des opérations linéaires*, p. 95). Mazur pointed out (*loc. cit.*) that the Cesàro and Euler methods of positive order are perfect. The purpose of the present paper is to find conditions under which the Nörlund, Hausdorff, and weighted-mean methods will be of type M . We quote the following results: (I) The product $AB \equiv C$ of two triangular perfect methods A and B is also a triangular perfect method. (II) If the product $AB \equiv O$ of two triangular convergence-preserving methods A and B is of type M , then A must be of type M . (III) A necessary and sufficient conditions that the Nörlund triangular matrix $\{a_{nk}\} = \{p_{n-k}/P_n\}$ (where $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $P_n \neq 0$ for $n = 0, 1, \dots$) be of type M , it is sufficient that the sequence

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & \dots & \dots & 1 \\ p_n & p_{n-1} & \dots & \dots & \dots & p_1 \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

be bounded. (IV) Let H_0 and H be two Hausdorff matrices [Hausdorff, *Math. Z.* 9, 74—109 (1921)]. If H is normal and convergence-preserving, and if H_0 is of type M and not weaker than H , then H is of type M . (V) The product of a finite number of perfect Hausdorff methods is likewise a perfect Hausdorff method. (VI) Every weighted-mean matrix $\{a_{nk}\} = p_k/P_n$ ($k = 0, 1, \dots, n$) is of type M . *A. Zygmund.*

Kales, Morris L.: *Tauberian theorems related to Borel and Abel summability.* Duke math. J. 3, 647—666 (1937).

The author proves Tauberian theorems with conditions of Schmidt's type " $\lim (s_m - s_n) \geq 0$ whenever $0 < m - n = o\{\varphi(n)\}$ " for certain general classes of methods of summability. There are two main theorems. The first covers cases where $\varphi(n)$ increases like n^α ($0 < \alpha < 1$), and in particular Borel's method ($\alpha = \frac{1}{2}$). The

second corresponds to the case $\alpha = 1$, and includes Abel's method. The proofs are modelled on Vijayaraghavan's proofs for these two particular methods [J. London Math. Soc. 1, 113—120 (1926); Proc. London Math. Soc. (2) 27, 316—326 (1927)].
Ingham (Cambridge).

Cooke, Richard G.: On divergence and singularities of analytic functions. J. London Math. Soc. 12, 304—308 (1937).

If $\nu = \frac{1}{2}r - m$ ($m = \text{any integer, positive or negative}$), $r > 0$, $q > 0$, then

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2}{\omega^r} \sum_{k=1}^{\infty} k^r J_{k+\nu}^2(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2}{\omega^r \log^q \omega} \sum_{k=1}^{\infty} k^r \log^q k J_{k+\nu}(\omega) = \frac{\Gamma(r+1)}{2^r \{ \Gamma(\frac{1}{2}r+1) \}^2}.$$

For the meaning of this result, see this Zbl. 17, 303.

A. Zygmund (Wilno).

Chow, H. C.: Note on the absolute Cesàro summability of power series. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 484—489 (1937).

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ in $|z| < 1$ regulär. Gilt dann

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} = O((1-r)^{-1+k}) \quad \text{für } r \rightarrow 1-0$$

($p \geq 1$, $0 < k \leq 1$), so heiße $f(z)$ zur (komplexen) Klasse $\text{Lip}(k, p)$ gehörig. Nach Hardy und Littlewood [Math. Z. 28, 612—634 (1928)] ist $\sum c_n e^{ni\theta}$ absolut konvergent, wenn $f(z)$ zu $\text{Lip}(k, p)$ mit $1 < p \leq 2$, $kp > 1$ gehört. Diese Behauptung gilt nicht mehr a) für $p > 2$, $\frac{1}{2} \geq k > \frac{1}{p}$, b) für $p > 1$, $0 < kp \leq 1$. Verf. zeigt dazu: Im Falle a) ist $\sum c_n e^{ni\theta}$ für alle θ absolut (C, α)-summierbar mit jedem $\alpha > \frac{1}{2} - k$. Ist im Falle b) für ein θ die Beziehung

$$\int_0^t |f(re^{i\theta+i\Phi})|^p d\Phi = O\left(\frac{|t|}{(1-r)^{p(1-k)}}\right) \quad \text{für } 0 < 1-r \leq |t| \leq \pi$$

erfüllt, so ist an dieser Stelle $\sum c_n e^{ni\theta}$ absolut (C, α)-summierbar für jedes $\alpha > \frac{1}{p} - k$ falls $p \leq 2$, für jedes $\alpha > \frac{1}{2} - k$ falls $p > 2$. — Im Falle a) wird aus dem genannten Ergebnis als unmittelbare Folgerung ein Satz über die absolute C -Summierbarkeit Fourierscher Reihen erhalten.

F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Pitt, H. R.: Theorems on Fourier series and power series. Duke math. J. 3, 747—755 (1937).

The following extensions of the well-known Hausdorff theorems [Math. Z. 16, 163—169 (1923)] and of certain Hardy-Littlewood inequalities [Math. Ann. 97, 159 and this Zbl. 14, 214] are given. If $p > 0$, let

$$\mathfrak{S}_p[a_n] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}, \quad \mathfrak{I}_p[c_n] = \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n \right)^p dx \right)^{1/p}, \quad \mathfrak{M}_p[F(\theta)] = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

If $g(z)$ is regular for $|z| < 1$, we write $\mathfrak{S}_p[g(z)] = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$. (I) If $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$

for $|z| < 1$, $\infty > q \geq p > 0$, $\alpha \geq 0$, $\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \alpha - 1 \geq 0$, then

$$\mathfrak{S}_q[c_n n^{-\lambda}] \leq K \mathfrak{S}_p[g(z)(1-z)^\alpha], \quad \mathfrak{I}_q[c_n n^{-\lambda-1+2/q}] \leq K \mathfrak{I}_p[g(z)(1-z)^\alpha].$$

where K is independent of $g(z)$. — (II) Let $F(\theta)$ be integrable and periodic, and let

$$F(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad (a_0 = 0), \quad \infty > q \geq p > 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}, \quad \lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \alpha - 1 \geq 0.$$

Then $\mathfrak{S}_q[a_n n^{-\lambda}] \leq K \mathfrak{M}_p[F(\theta) \theta^\alpha]$, $\mathfrak{M}_q[F(\theta) \theta^{-\lambda}] \leq K \mathfrak{S}_p[a_n n^\lambda]$.

— (III) Suppose that $G(\theta)$ is the boundary function of an analytic function $g(z) = \sum_1^{\infty} c_n z^n$, that $s_n(x) = \sum_1^n c_n e^{i n x}$ and that p, q, α satisfy the conditions of (I). Then

$$\mathfrak{S}_2[(s_n(x) - s(x))n^{-\lambda}] \leq K \mathfrak{M}_p[(F(x + \theta) - s(x))\theta^{\alpha-1}]$$

whenever the right side is finite [$s(x)$ is an arbitrary function of x ; we may take e.g. $s(x) = G(x)$]. — (IV) A result analogous to (III) holds for Fourier series. *A. Zygmund.*

Bary, Nina: Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème d'unicité du développement trigonométrique. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 699—722 (1937).

Le but de l'auteur est de montrer que la distinction entre les ensembles d'unicité du développement trigonométrique (ensembles U) et les ensembles de multiplicité (ensembles M) dépend des propriétés arithmétiques des ensembles. En ce but l'auteur considère „des ensembles parfaits symétriques à rapport constant“, c'est à dire des ensembles qu'on obtient de la manière suivant: On part d'un segment $\sigma^{(0)}$ et d'une constante $\lambda < 1$; on exclut au milieu de $\sigma^{(0)}$ un intervalle $\delta^{(0)}$ de la longueur $\sigma^{(0)}/\lambda$; il reste deux segments $\sigma_i^{(1)}$ non exclus; on opère sur chacun d'eux comme on a opéré sur $\sigma^{(0)}$ et ainsi indéfiniment. Le résultat principal est: Si λ est égale à une fraction irréductible, alors dans le cas $p \neq q - 1$, $p \neq q - 2$ un ensemble parfait symétrique à rapport constant λ est un ensemble M et dans le cas $p = q - 1$ ou bien $p = q - 2$ un ensemble U . *A. Kolmogoroff (Moscou).*

Marcinkiewicz, J., and A. Zygmund: Two theorems on trigonometrical series. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 733—737 (1937).

Théorème 1. Une transformation homotétique d'un ensemble d'unicité du développement trigonométrique est encore un ensemble d'unicité. — **Théorème 2.** Il existe une série trigonométrique avec les coefficients tendant vers zéro mais non identiquement nuls qui est sommable partout vers zéro par une méthode linéaire T . *A. Kolmogoroff (Moscou).*

Salem, Raphaël: Sur la convergence presque partout de certaines séries trigonométriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 226—227 (1938).

La série (*) $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ converge presque partout si la série $\sum (a_n - a_{n+1})^2 \log n$

converge. La condition $\sum_{k=1}^n k|a_k - a_{k+1}| = o(n)$ implique la convergence presque partout de la série (*), pourvu que cette dernière soit une série de Fourier. De même pour la série $\sum a_n \sin nx$. *A. Zygmund (Wilno).*

Spezielle Funktionen:

Howell, W. T.: On products of Laguerre polynomials. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 396—405 (1937).

The author applies the tool of Laplace's transformation in order to obtain certain identities involving Laguerre polynomials. Other results derived by the method of the generating function, are also indicated. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Picone, Mauro: I polinomi di Hermite e di Laguerre come autosoluzioni. *Boll. Un. Mat. Ital.* 16, 205—218 (1937).

Die Hermiteschen Polynome können bekanntlich als Eigenfunktionen einer Differentialgleichung 2. Ordnung auf der ganzen x -Achse betrachtet werden, wobei als Randbedingung die Wachstumseinschränkung $|H(x)| < M \cdot |x|^\alpha$ eintritt (M, α positive Zahlen). Verf. zeigt, wie man diese Ungleichung durch die schwächere $|H(x)| < M e^{\frac{x^2}{2}} |x|^\alpha$ ersetzen kann. Der Beweis dafür beruht auf der Bildung der Greenschen Funktion für den Differentialausdruck $(e^{x^2} \psi')'$ und auf der Anwendung der Hilbert-Schmidtschen Theorie für Integralgleichungen 2. Art mit reellem symmetrischem Kern. Für die Laguerreschen Polynome werden analoge Betrachtungen entwickelt. *G. Cimmino (Napoli).*

Banerji, D. P.: The expansion of an arbitrary function in a series of conal or toroidal functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 30—32 (1938).

Die Konusfunktionen (Legendresche Funktionen, deren Index gleich $-1/2 i p$, wobei p eine ganze Zahl ist) werden durch eine Integralformel mit veränderlicher oberer Grenze definiert. Für die zu entwickelnde Funktion wird eine Abelsche Integralgleichung angeschrieben. Indem für die abhängige Veränderliche im Integranden eine Fourierreihe angesetzt wird, folgt formal hieraus sofort die Entwicklung der vorgegebenen Funktion in einer Reihe nach Konusfunktionen, wobei für die Koeffizienten bestimmte Integraalausdrücke angegeben werden. Die Torusfunktionen sind Legendresche Funktionen, deren Index gleich der Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Durch Anwendung der gleichen Methode wie bei den Konusfunktionen erhält Verf. unmittelbar die formale Entwicklung einer vorgegebenen Funktion in einer Reihe von Konusfunktionen. In einem Anhang wird der allgemeine Zusammenhang des benutzten Verfahrens mit der Theorie der linearen Transformationen angedeutet. *M. J. O. Strutt.*

Mehlenbacher, Lyle E.: The interrelations of the fundamental solutions of the hypergeometric equation; logarithmic case. Amer. J. Math. 60, 120—128 (1938).

Verf. untersucht die analytische Fortsetzung der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ für den Fall, daß $\alpha - \beta$ ganz ≥ 0 ist. Die hypergeometrische Differentialgleichung besitzt dann in der Umgebung von $z = \infty$ ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$G_1(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; 1/z),$$

$$G_2(z) = G_1(z) \log(1/z) + z^{-\beta} \sum_{r=0}^{\infty} h_r z^{-r},$$

(die h_r sind von α, β und γ abhängig; $h_{\alpha-\beta} = 0$). — Verf. leitet nun für $0 < \arg z < 2\pi$ die folgende analytische Fortsetzung der Funktion $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ ab:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)[\psi(\alpha) + \psi(\gamma - \alpha) + 2C + i\pi - \sum_{s=1}^n (1/s)] e^{i\pi(\beta+1)}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(n+1)} G_1(z) \\ + \frac{\Gamma(\gamma) e^{i\pi(\beta+1)}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(n+1)} G_2(z);$$

hierin ist $\psi(w) = \Gamma'(w)/\Gamma(w)$, C die Eulersche Konstante und $n = \alpha - \beta$. — Verf. drückt auch $F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z)$ ($\alpha - \beta$ ganz ≥ 0) in $G_1(z)$ und $G_2(z)$ aus. —

[Bemerkung des Ref.: In Formel (C) auf S. 123 steht fälschlich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{z^n}$ statt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(-n)}{z^n}$.]
C. S. Meijer (Groningen).

Erdélyi, A.: Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 267—277 (1937).

Als Fortsetzung der früher erwähnten Arbeit (dies. Zbl. 17, 163) werden in vorliegender Mitteilung durch Benutzung der „Faltungsmethode“ allgemeine Funktionalbeziehungen für alle hypergeometrischen Reihen einer Veränderlichen — sowohl für die „vollständigen“ als auch für die „konfluenten“ — aufgestellt, und aus ihnen Integraldarstellungen für die hypergeometrischen Reihen abgeleitet. Die mehrdimensionale Faltung wird definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) \ast \dots \ast g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) g(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) du_1 \dots du_n = \\ = x_1 x_2 \dots x_n \int_0^1 \dots \int_0^1 f[t_1 x_1, \dots, t_n x_n] g[(1 - t_1) x_1, \dots, (1 - t_n) x_n] dt_1 \dots dt_n.$$

Zuerst werden Beziehungen zwischen solchen hypergeometrischen Reihen hergeleitet, die in allen Parametern der „zweiten Gruppe“ übereinstimmen, bei denen also $c_j = c_j$.

für alle $j = 1, \dots, q$ ist und nur einige — möglicherweise alle — der a_j in beiden Reihen verschieden sind. Die allgemeinste Formel dieser Gestalt ist

$$\left. \begin{aligned} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} x \right] &= \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 - a_1)} \cdots \frac{\Gamma(\alpha_m)}{\Gamma(\alpha_m)\Gamma(\alpha_m - a_m)} \times \\ &\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1^{a_1-1} (1-t_1)^{\alpha_1-a_1-1} \cdots t_m^{a_m-1} (1-t_m)^{\alpha_m-a_m-1} \times \\ &\times {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m, a_{m+1}, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} t_1 \dots t_m x \right] dt_1 \dots dt_m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$(0 < \Re(a_j) < \Re(\alpha_j); m \leq p)$

Durch entsprechende Wahl der Parameter α_j kann erreicht werden, daß sich die Ordnung der hypergeometrischen Funktion auf der rechten Seite von (1) reduziert. Als Gegenstück wird die Beziehung angegeben, welche zwei ${}_pF_q$ mit gleichen Parametern der „ersten Gruppe“ verbindet:

$$\left. \begin{aligned} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} x \right] &= \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(c_1 - \gamma_1)} \cdots \frac{\Gamma(c_n)}{\Gamma(\gamma_n)\Gamma(c_n - \gamma_n)} \times \\ &\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1^{\gamma_1-1} (1-t_1)^{c_1-\gamma_1-1} \cdots t_n^{\gamma_n-1} (1-t_n)^{c_n-\gamma_n-1} \times \\ &\times {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n, c_{n+1}, \dots, c_q; \end{matrix} t_1 \dots t_n x \right] dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$(0 < \Re(\gamma_i) < \Re(c_i); n \leq q)$

Die Kombination von (1) und (2) liefert die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} x \right] &= \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 - a_1)} \cdots \frac{\Gamma(\alpha_m)}{\Gamma(\alpha_m)\Gamma(\alpha_m - a_m)} \cdot \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(c_1 - \gamma_1)} \cdots \frac{\Gamma(c_n)}{\Gamma(\gamma_n)\Gamma(c_n - \gamma_n)} \times \\ &\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{a_1-1} (1-u_1)^{\alpha_1-a_1-1} \cdots u_m^{a_m-1} (1-u_m)^{\alpha_m-a_m-1} v_1^{\gamma_1-1} (1-v_1)^{c_1-\gamma_1-1} \cdots \\ &\cdots v_n^{\gamma_n-1} (1-v_n)^{c_n-\gamma_n-1} \times \\ &\times {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m, a_{m+1}, \dots, a_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n, c_{n+1}, \dots, c_q; \end{matrix} u_1 \dots u_m v_1 \dots v_n x \right] du_1 \dots du_m dv_1 \dots dv_n. \end{aligned}$$

$(0 < \Re(\alpha_i) < \Re(\alpha_i); m \leq p; 0 < \Re(\gamma_i) < \Re(c_i); n \leq q)$

Endlich wird unter Verwendung des Hankelschen Integrals

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^u u^{-z} du$$

gezeigt

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} x \right] &= \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_1) \cdots \Gamma(\lambda_n)}{(2\pi i)^n} \int_{-\infty}^{(0+)} \cdots \int_{-\infty}^{(0+)} e^{u_1 + \cdots + u_n} {}_{p+n}F_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ c_1, \dots, c_q; \end{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_n; \frac{x}{u_1 \dots u_n} \right] \frac{du_1}{u_1^{\lambda_1}} \cdots \frac{du_n}{u_n^{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

$(p+n \leq q+1; \lambda_j \neq 0, -1, -2, \dots; j = 1, \dots, n)$

(Falls $p+n \leq q$, unterliegen die Integrationswege keiner Beschränkung. Ist aber $p+n = q+1$, so müssen sie so verlaufen, daß ständig $|u_1 \dots u_n| > x$ bleibt.) Sonderfall: $p=0$; $n=q$, $\lambda_j = c_j$. Diese Formel bildet für $n > 1$ die Verallgemeinerung der Sonine-Sommerfeldschen Integraldarstellung der Besselschen Funktionen.

S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

Meijer, C. S.: Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von Whittakerschen Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40**, 871—879 (1937).

Der Verf. leitet aus seinen früheren Ergebnissen mehrere Integraldarstellungen für Produkte von Wh-Funktionen ab, z. B.:

$$W_{k,m}(z)M_{-k,m}(z) = \frac{z\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} \int_0^\infty J_{2m}(z \operatorname{sh} t) \coth^{2k} \frac{t}{2} dt$$

$$z > 0, \quad 2m \neq -1, -2, -3, \dots, \quad \Re(m-k) > -\frac{1}{2}.$$

$$W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_1^\infty K_{2m}(zv) (v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} - k, -k \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; 1 - v^2 \right] v^{-2k} dv;$$

$$W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_{2m}(z \sec \varphi) \cos 2k\varphi \sec \varphi d\varphi; \quad z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

$$W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z) = \frac{z}{2} i e^{(m-k)\pi i} \int_L H_{2m}^{(1)}(z \operatorname{sh} t) \tanh^{2k} \frac{t}{2} dt,$$

k und m beliebig, $z > 0$; L von $\infty e^{\pi i}$ nach ∞ so, daß der Punkt $t = 0$ durch einen oberhalb der reellen Achse liegenden Halbkreis vermieden wird.

$$W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z) = \frac{z}{2} i e^{(m-k)\pi i} \int_L J_{2k}\left(\frac{t}{2}\right) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) dt.$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad k \text{ und } m \text{ beliebig, } L \text{ wie oben.}$$

Die Anwendung auf die parabolische Zylinderfunktion

$$D_n(z) = 2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

liefert u. a.:

$$D_n(z)D_{-n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{-\frac{z^2}{2} \sec \varphi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi \sec \varphi d\varphi. \quad \left(z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right)$$

Endlich liefert die Anwendung auf die Funktion

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} W_{0,\nu}(2z)$$

$$K_\nu(z)K_\mu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\mu\pi i} \int_L H_{\mu+\nu}^{(1)}(2z \operatorname{sh} t) e^{(\nu-\mu)t} dt. \quad \left(z > 0, \quad \Re(\nu-\mu) < \frac{3}{2}\right)$$

S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Stammhammer, Otto: Beiträge zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades. Würzburg: Diss. 1937. 59 S.

Levi-Civita, T.: Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione. Rev. Ci., Lima 39, Nr 421, 71—78 (1937).

Es sei $F(x)$ eine in $a \leq x \leq b$ stetig differenzierbare Funktion mit $F(a) = F(b) = 0$, $F(x) > 0$ im $a < x < b$. Wenn dann $x(t_0)$ im Intervall $[a, b]$ liegt, dann besitzt die zu dem Anfangswert $x(t_0)$ gehörige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$

die Periode $T = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$. Speziell für $F(x) = f(x) = \omega^2(x-a)(b-x)$ mit konstantem positivem ω wird $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein

expliziter Ausdruck für die erste Näherung von T angegeben, wenn $F(x) = f(x) + \varepsilon g(x)$ ist, wobei ε als kleiner Störungsparameter und $g(x)$ als gegebene Funktion aufzufassen ist. Insbesondere wird der Fall behandelt, daß $g(x)$ ein Polynom dritten Grades in x ist.

Rellich (Marburg, Lahn).

Butlewski, Zygmunt: Sur les intégrales réelles des équations différentielles linéaires ordinaires. *Wiadom. mat.* 54, 17—81 (1938) [Polnisch].

1^{re} partie. Théorèmes d'oscillation pour le système: (*) $\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)y = 0$, $\frac{dy}{dt} + c(t)x + d(t)y = 0$, a, b, c, d continues pour $K \leq t \leq L$. Lorsque b ne change pas de signe, les zéros d'une solution x_1 séparent les zéros d'une autre solution x_2 , la propriété analogue pour c et y ; si b, c ne changent pas de signe, les zéros de x et de y séparent les uns les autres; or, si $b \cdot c > 0$, toute solution est non oscillatoire. Étant donnés deux systèmes de la forme (*), aux coefficients resp. $a_1, \dots, d_1, a_2, \dots, d_2$, la solution x de la première est plus oscillante que celle de la seconde, si $0 > b_1 \exp \int_K^t (a_1 - b_1) dt \geq b_2 \int_K^t (a_2 - b_2) dt, c_1 \exp \left(- \int_K^t (a_1 - d_1) dt \right) \leq c_2 \exp \left(- \int_K^t (a_2 - d_2) dt \right)$;

des inégalités analogues pour y . Théorèmes de comparaisons pour les zéros de deux systèmes (*) aux valeurs initiales soumises à certaines inégalités. Applications à l'équation $x'' + B(t)x' + A(t)x = 0$. 2^{de} partie. Conditions suffisantes pour que les solu-

tions du système $\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = f_i$ ($t \geq t_0, i = 1, 2, \dots, n$) soient bornées: $\int_{t_0}^{\infty} |a_{ii}| dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty} |a_{ik} + a_{ki}| dt < \infty, \int_{t_0}^t |f_i| dt < \infty$; un résultat plus précis pour $n = 2$.

Critères de stabilité contenant une fonction indéterminée λ . Le dernier § contient des généralisations des résultats de Biernacki (ce Zbl. 6, 200), de Milloux (ce Zbl. 9, 164); voir aussi Butlewski (ce Zbl. 14, 18).

W. Stepanoff (Moskau).

Iglisch, Rudolf: Über den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen. *Z. angew. Math. Mech.* 17, 249—258 (1937).

Nach einer kurzen Darstellung des bekannten Resonanzfalles bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird der folgende „nichtlineare Resonanzfall“ behandelt. Vorgelegt sei eine mit der Periode P periodische Lösung $x(t)$ der nichtlinearen Gleichung $\ddot{x} + f(x) = g(t)$, wobei $g(t)$ eine gegebene Funktion mit $g(t + P) = g(t)$ bedeutet. Neben dieser Gleichung wird die Gleichung (*) $\ddot{y} + f(y) = g(t) + \beta G(t)$ betrachtet, wobei $G(t)$ wieder die Periode P besitzt und β einen hinreichend kleinen Parameter bedeutet. Wenn die Gleichung (**) $\ddot{\varphi} + f'(x)\varphi = 0$ eine Lösung $\varphi(t)$ mit der Periode P besitzt, dann wird vom Resonanzfall gesprochen, sonst vom Nichtresonanzfall. Dann wird für genügend kleine β bewiesen: „1. Im Nichtresonanzfall kann Gl. (*) höchstens eine zu $x(t)$ benachbarte mit P periodische Lösung $y(t)$ besitzen; die zusätzliche Schwingung $y(t) - x(t) = u(t)$ hat eine Amplitude der Ordnung β . 2. Im Resonanzfall können höchstens dann mit P periodische Zusatzschwingungen der Ordnung β auftreten, wenn

$$\int_t^{t+P} G(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (**)$$

ist für jede mit P periodische Lösung $\varphi(t)$ von (**). 3. Ist (**) nicht erfüllt, so nimmt in endlicher Zeit jede Zusatzschwingung Werte der Größenordnung $\sqrt{\beta}$ an; insbesondere ist die Amplitude einer etwa existierenden mit P periodischen Zusatzschwingung mindestens von der Ordnung $\sqrt{\beta}$.“ Entsprechendes für den Fall, daß f außer von x auch noch von \dot{x} bzw. von \dot{x} und t abhängt. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Schaefer, Hermann: Beitrag zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes eindimensionaler Eigenwertprobleme. Hannover: Diss. 1934 (1937). 36 S.

Zwirner, Giuseppe: Sopra una generalizzazione dei sistemi di Sturm-Liouville. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* 96, 229—233 (1937).

Quelques théorèmes sur les nombres caractéristiques λ_i du système $\frac{d}{dx}(ku') = (\lambda^2 g + f)u$, $k, g, f > 0$ pour $a \leq x \leq b$; $(A + B\lambda)u'(a) + [h(A + B\lambda) + \alpha\lambda^2]u(a) = 0$,

$(A_1 + B_1 \lambda) u'(b) + [h(A_1 + B_1 \lambda) + \alpha \lambda^2] u(b) = 0$, $A, B, \dots, h, \alpha > 0$, in particulier pour de petites valeurs de α . Généralisation du système considéré par E. Laura [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 31 (1922)]. *W. Stepanoff* (Moskau).

Schönberg, M.: Sopra una classe di equazioni funzionali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 221—226 (1937).

Funktionalgleichungen der Form $\sum_{\alpha\beta\dots e} D_1^\alpha D_2^\beta \dots D_r^e \psi(x) + b\psi(x) = 0$ bzw. daraus abgeleitete Gleichungen werden mit Hilfe des bekannten Eigenfunktionsansatzes behandelt. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Kotsakes, D.: Über die Integration einer Klasse Mongescher Gleichungen. Bull. Soc. Math. Grèce 18, 9—23 (1938) [Griechisch].

Petrescu, St.: Sur les invariants des équations de Goursat. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 232—256 (1938).

Une équation du second ordre (1) $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ s'appelle équation de Goursat si une famille de caractéristiques est du premier ordre et l'autre du second ordre. En poursuivant les recherches de M. G. Vranceanu (v. ce Zbl. 17, 351), l'a. étudie, dans le présent travail, les invariants de l'équation (1), par rapport aux transformations de contact, en supposant que cette équation est une équation de Goursat. Dans ce cas l'équation (1) est géométrisable. Si les systèmes de caractéristiques ont des combinaisons intégrables l'équation (1) admet une forme explicite simple et le groupe maximum de transformations de cette équation en elle même dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. *O. Borůvka* (Brno).

● **Saltykow:** Les progrès et les problèmes actuels de la théorie des équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars 1937. 10 pag. Frs. 7.—.

Tzortzes, A.: Über eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Bull. Soc. Math. Grèce 18, 1—8 (1938) [Griechisch].

Giambelli, Giovanni: Calcolo simbolico per sistemi di equazioni di primo grado alle derivate parziali a coefficienti costanti. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 41—48 (1936).

Äquivalenz der Formel (dies. Zbl. 14, 260) für die Dimensionsanzahl eines Linear-systems von Polynomen gegebener Ordnung, die ein System der im Titel genannten Art befriedigen, mit einer Formel für das zugehörige geometrische Bild (dies. Zbl. 11, 402). *G. Cimmino* (Napoli).

Giambelli, Giovanni: Corrispondenze a più indici immagini di equazioni differenziali. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 5—12 (1936).

Giambelli, Giovanni: Integrale generale di estensioni dell'equazione differenziale della propagazione del calore. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 156—168 (1937).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 11, 402) über den formalen Ausdruck der allgemeinen Lösung eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in Beziehung mit geometrischen Bildern. *G. Cimmino* (Napoli).

Chaundy, T. W.: Partial differential equations with constant coefficients. II. Quart. J. Math. Oxford Ser. 8, 280—302 (1937).

Verf. löst in Analogie zur Riemannschen Integrationsmethode das Cauchysche Anfangswertproblem für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, bei denen die Anzahl der Charakteristiken die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen übertrifft. Im Fall zweier Veränderlicher handelt es sich zunächst um die Diff. Gl.

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V \equiv \prod_{r=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + b_r \frac{\partial}{\partial y}\right) V = V.$$

Den $\frac{m(m-1)}{2}$ Paaren von Charakteristiken $y - b_r x = \text{konst.}$ ($r = 1 \dots m$) durch einen beliebigen Punkt entsprechen ebenso viele „sub-fundamental solutions“ u_{rs} (Integra-

tion längs des aus 2 Charakteristiken und dem Bogen der Grundkurve gebildeten Dreiecks PQ_rQ_s). Aus ihnen werden die „fundamental solutions“ $U_r = \sum_{s \neq r} u_{rs}$ gebildet, die sich in der Form

$$U_r(X, Y; x, y) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{\Gamma_r, n=0}^{\infty} \frac{\{(X-x)t - (Y-y)\}^{mn+m-2} dt}{(mn+m-2)! \{(t-b_1) \dots (t-b_m)\}^{n+1}}$$

ansetzen lassen (Γ_r umschlieÙe $t = b_r$ als einzigen Pol). Längs der Charakteristik PQ_r verschwindet $\left(\frac{\partial U_r}{\partial x} + b_r \frac{\partial U_r}{\partial y}\right)$ samt den Ableitungen bis zur Ordnung $(m-3)$, und ist Φ von der Ordnung $m-2$, so wird $\Phi\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)U_r = \frac{\Phi(b_r, -1)}{\prod_{s \neq r} (b_r - b_s)}$. Mit Hilfe dieser

Grundlösungen, die bez. x, y der adjungierten Gleichung $f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)U_r = U_r$ genügen, lassen sich m Funktionen A_r bilden, deren jede längs ihrer Charakteristik PQ_r konstant ist, und mit denen die allg. Lösung der Ausgangsgleichung in $P(X, Y)$

$$V(X, Y) = \sum_{r=1}^m A_r(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^m \int_0^{Q_r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} dx + \frac{\partial A_r}{\partial y} dy \right),$$

(0 belieb. Pkt. auf der Grundkurve) in Abhängigkeit von ihren Werten und denen ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $(m-1)$ dargestellt erscheint. Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung in 2 Veränderlichen „with excessive characteristics“. — Verallgemeinerung auf mehr Veränderliche. Die Lösung der Diff. Gl. $f(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)V \equiv \prod (a_r \frac{\partial}{\partial x} + b_r \frac{\partial}{\partial y} + c_r \frac{\partial}{\partial z})V = V$ wird nach demselben Verfahren mit Hilfe der Grundlösungen U_{rs} konstruiert, die zu den $\frac{m(m-1)}{2}$ Paaren charakteristischer Strahlen $\left(\frac{dx}{a_r} = \frac{dy}{b_r} = \frac{dz}{c_r}\right)$ gehören und die als komplexe Doppelintegrale angesetzt werden können. (I. vgl. dies. Zbl. 17, 115.)

v. Koppens (Würzburg).

Greco, Santi: Estensione dell'equazione alle derivate parziali a coefficienti costanti per l'armilla. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 18—23 (1936).

Einfache Bemerkungen über die formale Auflösung einiger partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

G. Cimmino (Napoli).

Giraud, Georges: Généralisation d'un type de problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 25—71 (1938).

L'auteur cherche à traiter avec la plus grande généralité ses problèmes aux limites „du 3^{ème} type“ relatifs à

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha} b_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f.$$

La frontière est assez régulière mais sur elle comme dans le domaine, il peut y avoir des discontinuités pour u et ses dérivées sur certaines variétés, avec des restrictions sur l'allure au voisinage. La condition aux limites est du type mixte, à cela près que la dérivée suivant la normale de cos. directeurs $\bar{\omega}_\alpha$ est remplacée par une dérivée dans la direction de paramètres directeurs $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \bar{\omega}_\beta$. La différence avec le second

type est qu'on ne suppose pas $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, cas d'inégalité qui se présente naturellement dans certains problèmes d'électromagnétisme (voir ce Zbl. 13, 92). Par des méthodes analogues à celles du second type étudié déjà avec grande généralité [voir Nouvelle généralisation ... Ann. Soc. Polon. math. 14, 74 (1935)] sont traités en supposant $c \leq 0$, un problème homogène, puis un problème général, toujours grâce à la théorie de Fredholm convenablement étendue. Le mémoire s'achève par des propriétés de la fct. de Green, de ses dérivées, de celles de u , du genre de limitations de Lipschitz.

Brelot (Bordeaux).

Cimmino, Gianfranco: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa.* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 73—96 (1938).

Die Arbeit behandelt elliptische Differentialausdrücke $\mathfrak{L}u$ auf einer topologisch definierten geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit S ; mit Hilfe einer Überdeckung durch endlich viele auf einen offenen x - y -Bereich abgebildete Bereiche sind Differentialquotienten, Integral, Maß auf ihr definiert. Zur Anwendung kommen Methoden der allgemeinen Funktionalanalysis, ohne daß Greensche Funktion oder andere bestimmte Fundamentallösungen benutzt werden, und zwar wird eine von R. Caccioppoli (dies. Zbl. 10, 168) angegebene Methode ausgedehnt. Als Operationsbereich dient der Raum der additiven, total stetigen Mengenfunktionen auf S , $F(E) = \iint_S \delta(P) dP$, deren Dichte $\delta(P)$ samt ihrer $\left(\frac{p}{p-1}\right)$ -ten Potenz ($p > 2$) summabel ist; in ihm wird eine Metrik durch $\left(\iint_S \delta^{p-1} dP\right)^{\frac{p-1}{p}}$ gegeben. Das grundlegende

Theorem ist, daß aus dem Verschwinden eines linearen Funktional $\iint_S f dF$ für alle $F(E)$

von der Dichte $\mathfrak{L}u - u$ zweimal stetig differenzierbar auf S — folgt, daß f sich nur in einer Menge von Maß 0 von einer Lösung der adjungierten Differentialgleichung $\mathfrak{M}v = 0$ unterscheidet. Als wesentliches Hilfsmittel zum Beweis erscheint eine Integraldarstellung der Lösungen dieser Differentialgleichung, die einen bekannten Gaußschen Satz der Potentialtheorie verallgemeinert. Hieraus werden für die Lösbarkeit der Gleichungen $\mathfrak{L}u = f$, $\mathfrak{M}v = 0$, $\mathfrak{L}v = 0$ Alternativsätze genau von dem klassischen Typus hergeleitet, wobei ähnlich wie in einer vorhergehenden Arbeit des Verf. (s. dies. Zbl. 17, 214) sinngemäß Methoden übertragen werden, die bei der Lösung von Funktionalgleichungen etwas anderer Art schon früher, insbes. von F. Riesz, entwickelt wurden.

Hellinger (Frankfurt a. M.).

Agostinelli, C.: *Integrazione dell'equazione differenziale* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$, e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 26, 216—221 (1937).

Für die Gleichung des Titels läßt sich eine Fundamentallösung explizit angeben; so kann man die Greensche Formel aufstellen. Ist das Gebiet eine Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $x > 0$, so kann man auch die Greensche Funktion explizit ausdrücken, also die 1. Randwertaufgabe durch eine Integralformel lösen. (I. vgl. dies. Zbl. 17, 353.)

G. Cimmino (Napoli).

Humbert, Pierre: *Sur une solution particulière de l'équation $A_3 U = 0$.* Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 57, 142—145 (1937).

Für die Differentialgleichung $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = 0$ werden partiikuläre Lösungen angegeben.

Rellich (Marburg, Lahn).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Monna, A. F.: *Das Problem von Dirichlet.* Nieuw Arch. Wiskde 19, 249—256 (1938) [Holländisch].

Bilger, G.: *Des polygones potentiellement équivalents.* C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques 19) 54, 41—43 (1937).

Bilger, G.: *Potentiel de polygones et géométrie élémentaire.* C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques 19) 54, 84—88 (1937).

Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen zwei homogen belegte Streckenzüge in dem das Unendliche enthaltenden Gebiete dasselbe logarithmische Potential erzeugen. Speziell wird gezeigt, daß bei passend gewählter Ladungsdichte jedes reguläre

n -Eck äquivalent ist mit den n Radien des umschriebenen Kreises, die nach den Polygonecken führen. *W. Feller* (Stockholm).

Kappos, Dem. A.: Über einige Eigenschaften der harmonischen Funktionen. Bull. Soc. Math. Grèce 18, 78—83 (1938) [Griechisch].

x_1, \dots, x_n seien reelle Veränderliche. Für eine Funktion $f(P)$ von diesen (P der Punkt mit den Koord. x_1, \dots, x_n) und $h > 0$ werde

$$\mu\{f(P), h\} = \frac{1}{h^2} \{f(x_1 + h, \dots, x_n) + f(x_1 - h, \dots, x_n) + \dots \\ + f(x_1, \dots, x_n + h) + f(x_1, \dots, x_n - h) - 2nf(x_1, \dots, x_n)\}$$

gesetzt und für $r > 0$ unter $M\{f(P), r\}$ der Mittelwert von f auf der Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r verstanden. Verf. beweist die beiden Sätze: Wenn eine Funktion $F(P)$ auf der abgeschlossenen Kugel

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq R^2$$

stetig ist und im Innern dieser Kugel überall die Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu\{F(P), h\} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M\{F(P), r\} - F(P)}{r^2} = 0$$

erfüllt, so ist sie im Innern der Kugel harmonisch. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Poritsky, Hillel: On reflection of singularities of harmonic functions corresponding to the boundary condition $\partial u / \partial n + au = 0$. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 873—884 (1937).

Ist $u(x, y, z)$ für $x > 0$ harmonisch mit der Randbedingung $u_x - au = 0$ für $x = 0$, so ist $w = u_x - au$ wiederum harmonisch und verschwindet für $x = 0$. Man kann daher w für $x < 0$ fortsetzen durch $w(-x) = -w(x)$ und gelangt so zu einer Fortsetzung von u und zur Greenschen Funktion für die erstgenannte Randwertaufgabe im Falle $\Re(a) \geq 0$. Entsprechendes für $\Delta u + K^2 u = 0$. *W. Feller*.

Soboleff, S.: Sur un problème limite pour les équations polyharmoniques. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 465—498 u. franz. Zusammenfassung 498—499 (1937) [Russisch].

Exposé détaillé des résultats énoncés dans les Notes antérieures de l'auteur, ce Zbl. 14, 57; 15, 12, 159, 405. *Janczewski* (Leningrad).

Privaloff, I., et B. Pehelin: Sur la théorie générale des fonctions polyharmoniques. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 745—757 u. franz. Zusammenfassung 757—758 (1937) [Russisch].

Exposé détaillé des résultats cités ce Zbl. 15, 405. On étudie de plus près les propriétés de familles et de suites des fonctions polyharmoniques généralisées (pour les définitions voir loc. cit.). On démontre par ex. que si une suite $\{u_k(P)\}$ de fonctions polyharmoniques d'ordre n dans un domaine D converge uniformément à l'intérieur de D , alors la fonction limite $u(P)$ sera polyharmonique dans D ; la suite dérivée d'ordre quelconque converge uniformément vers la dérivée de $u(P)$ correspondante. Une fonction polyharmonique bornée dans tout l'espace est une constante. Considérons ensuite la classe K_n des fonctions polyharmoniques de l'ordre n dans D pour lesquelles tous les opérateurs de Laplace généralisés Δ_ϱ de l'ordre $\varrho < n$ sont non positifs si ϱ est impair et non négatifs si ϱ est pair. Si une famille E de K_n est bornée supérieurement à l'intérieur de D , alors cette famille est normale à l'intérieur de D . Une fonction de K_n bornée supérieurement dans tout l'espace est une constante. Si une suite de fonctions de K_n est bornée supérieurement à l'intérieur de D et converge dans un domaine $d \subset D$, alors cette suite converge uniformément à l'intérieur de D vers une fonction limite de K_n . *Janczewski* (Leningrad).

Gagaëff, B.: Sur les familles normales de fonctions polyharmoniques. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 759—767 u. franz. Zusammenfassung 767—768 (1937) [Russisch].

En s'appuyant sur un mémoire de M. Montel (ce Zbl. 12, 405) l'auteur étudie les propriétés des familles normales de fonctions polyharmoniques. Ses résultats étaient obtenus dans le même temps que ceux de Privaloff (voir plus haut); il s'agit seule-

ment ici des fonctions polyharmoniques dans le sens ordinaire, satisfaisant à l'équation $\Delta^p u = 0$. Les fonctions polyharmoniques de l'ordre p bornées dans leur ensemble en module dans un domaine D forment une famille normale à l'intérieur de D . Les fonctions limites sont polyharmoniques de même ordre. Les fonctions polyharmoniques de l'ordre p non négatives (non positives) dans un domaine forment une famille normale à l'intérieur de D si tous les opérateurs de Laplace de l'ordre $q < p$ dans D sont non positifs (non négatifs) pour q impair et non négatifs (non positifs) pour q pair. Une série $\sum u_k(P)$ des fonctions de cette sorte converge uniformément dans D vers une fonction polyharmonique de l'ordre p si la série converge en un point de D . Si une fonction polyharmonique possède partout un critère de normalité, elle est constante.

Janczewski (Leningrad).

Ghermanescu, Michel: Sur les fonctions n -metaharmoniques. Bull. sci. Ecole polytechn. Timișoara 7, 25—42 et 200—223 (1937).

Nähere Entwicklungen über Methoden und Ergebnisse, die vom Verf. im größten Teil schon veröffentlicht wurden (dies. Zbl. 2, 344, 392; 3, 259, 347; 4, 396; 14, 21). Es handelt sich um Lösungen einer partiellen Differentialgleichung $2n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten des Typus

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \dots + \lambda_n u = 0. \quad (*)$$

Aus dem Inhalt sei hier erwähnt: Randwertaufgabe mit vorgegebenen Randwerten für $u, \Delta u, \dots, \Delta^{n-1} u$; Greensche Funktion für $\Delta^n u = 0$; sukzessive Approximationen; Fundamentallösung für (*); Greensche Formel; Zurückführung gewisser Gleichungssysteme auf Gleichungen des Typus (*) durch Elimination; Gleichungen des Typus (*) mit komplexen Koeffizienten.

G. Cimmino (Napoli).

Variationsrechnung:

Sakellariu, Neilos: Das Parameterproblem der Variationsrechnung im N -dimensionalen Riemannschen Raum. Bull. Soc. Math. Grèce 18, 63—77 (1938) [Griechisch].

In einem ν -dimensionalen Riemannschen Raum mit den Koordinaten x_1, \dots, x_ν und dem Linienelementquadrat $ds^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k$ wird das Problem betrachtet, zwei feste Punkte P_1, P_2 durch eine Kurve zu verbinden, für die das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} f(x_i, \dot{x}_i) ds \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds} \right)$$

einen extremen Wert erhält. Dabei soll die Funktion f in den Variablen \dot{x}_i positiv-homogen von der Dimension 1 sein. Zweitens wird das folgende Lagrangesche Problem betrachtet: Im $(\nu + 1)$ -dimensionalen Raum der Veränderlichen x, x_1, \dots, x_ν soll ein fester Punkt P_1 mit einem zu bestimmenden Punkt P_2 auf der gegebenen Kurve

$$\bar{C}: \quad x = \bar{x}(s), \quad x_i = \bar{x}_i(s)$$

durch eine Kurve $x_i = x_i(x)$, für die

$$\varphi(x, x_i, x'_i) = 0 \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{dx} \right)$$

gilt, so verbunden werden, daß das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} f(x, x_i, x'_i) dx$$

einen extremen Wert erhält. Das erste Problem ist als sehr spezieller Fall im zweiten enthalten: $\bar{x}(s) = s; \quad \bar{x}_i(s) = x_i^{(2)}; \quad \varphi(x, x_i, x'_i) = \sum g_{ik} x'_i x'_k - 1; \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ von } x \text{ unabhängig und pos. homog. v. d. Dim. 1 in den } x'_i. \end{array} \right\} \quad (1)$

Für das zweite Problem werden nach den klassischen Methoden die Eulerschen Gleichungen und die Bedingungen von Legendre, Weierstraß und Clebsch aufgestellt. In dem besonderen Fall (1) verschwindet der zu φ gehörige Lagrangesche Multiplikator identisch.

Bessel-Hagen (Bonn).

Bower, Julia Wells: The problem of Lagrange with finite side conditions. Contribut. calculus variations 1933—1937, 1—51 a. Chicago: Thesis (1937).

In this paper a detailed study is made of the problem in which it is required to determine n functions $y_1(x), \dots, y_n(x)$ which minimize the integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_i, y'_i) dx$ and satisfy, besides the regularity conditions, a set of finite equations $\varphi_\alpha(x, y_i) = 0$, $\alpha = 1, \dots, m < n$. Two methods are followed, leading to one result. The first consists in setting up a related Lagrange problem, by differentiating the finite equations $\varphi_\alpha = 0$, and avoiding normality difficulties by a reduction of the terminal conditions. The need for this reduction has disappeared as a result of work published after the completion of the present paper (see e. g. Hestenes, this Zbl. 10, 306; 17, 268; Reid, this Zbl. 17, 267). The second method reduces the problem to one without side conditions by solving the equations $\varphi_\alpha = 0$ for m of the y 's; here the classical restrictive assumption on the matrix $\|\varphi_{\alpha y_i}\|$ (see Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, p. 549) is avoided by the method of Bliss [compare e. g. Trans. Amer. Math. Soc. 19, 312 (1918)] which consists of adjoining $n-m$ new equations to the set $\varphi_\alpha = 0$.

Arnold Dresden (Swarthmore).

Denbow, Carl Herbert: A generalized form of the problem of Bolza. Contribut. calculus variations 1933—1937, 449—484 a. Chicago: Thesis (1937).

The main problem treated in this paper is the following: To minimize the functional

$J = g(x_a, y_i(x_a)) + \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y_i, y'_i) dx$, $a = 1 \dots q$, $i = 1 \dots n$ in the class of sets

$[x_a, y_i(x)]$ which satisfy the conditions $\varphi_\beta(x, y_i, y'_i) = 0$, $\beta = 1 \dots m < n$ and $\psi_\mu[x_a, y_i(x_a)] = 0$ $\mu = 1 \dots p \leq (m+1)(q+1)$. The set x_a consists of points x_0, x_1, \dots, x_q such that $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_q = \beta$. The functions y_i are piecewise of class C' . The usual restrictions are imposed on the functions g, f, φ_β and ψ_μ . The method used for the solution of this problem consists in the reduction to a problem of Bolza by means of the transformations $y_i[x_b + (x_{b+1} - x_a)t] = z_{b n + 1}(t)$, $b = 0, \dots, q-1$, $x_a = z_{q n + a + 1}(t)$. The functional J then takes the form $g^*(z(0), z(1))$

$+ \int_0^1 f^*(t, z, z') dt$, while the conditions $\varphi_\beta = 0$ and $\psi_\mu = 0$ are transformed into conditions on the functions $z_{b n + i}(t)$ and conditions on their end-values respectively. The conditions for a minimum in a Bolza problem are then applied to this case. It is pointed out that the method is applicable to problems in which the integrand f depends also on the coordinates of the intermediate points $x_a, y_i(x_a)$, and to problems in which the functions f and φ_β have a finite number of finite discontinuities. *Arnold Dresden.*

Cosby, Byron: Fields for multiple integrals in the calculus of variations. Contribut. calculus variations 1933—1937, 53—83 a. Chicago: Thesis (1937).

The developments of this paper are based on the following definition of a field for the double integral $\iint f(x, y, z, p, q) dx dy$, given by Bliss (in mimeographed lectures, University of Chicago, 1933): An open bounded region is a field for the integral if there exists a pair of functions $p(x, y, z)$ and $q(x, y, z)$ of class C'' in the region, such that the points $[x, y, z, p(x, y, z), q(x, y, z)]$ lie in a region R of 5-space in which f is of class C'' , and such that $p_y + p_z q = q_x + q_z p$ and the integral

$$\iint (f + (z_x - p)f_p + (z_y - q)f_q) dx dy$$

has the same value for all surfaces in the region with a common boundary. The author secures conditions that a family of curves $u(x, y, z) = a$, $v(x, y, z) = b$ be transversal curves of the field. Results are obtained which are analogous to some of the theorems of the Hamilton-Jacobi theory for simple integrals. While the relation of his work to that of DeDonder's Théorie invariante (see this Zbl. 13, 169) is discussed, it is

surprising that no mention is made of the important paper of Carathéodory in the *Acta Litt. Sci. Szeged* 4, 193 (1929) (see also Weyl, this Zbl. 13, 120).

Arnold Dresden (Swarthmore).

Funktionentheorie:

Féodoroff, V. S.: Sur la méthode des moyennes intégrales et les méthodes analogues dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 521—540 u. franz. Zusammenfassung 541 (1937) [Russisch].

L'auteur introduit les notions de dérivée moyenne et de densité résiduelle pour les fonctions continues d'une variable complexe. Un nombre A est dit dérivée moyenne d'une fonction f en un point z_0 , lorsque, ω désignant un anneau circulaire quelconque entourant le point z_0 et tendant vers ce point, le quotient

$$\frac{1}{|\omega|} \left| \int_{(\omega)} \frac{f(t) - f(z_0)}{t - z_0} - A \right| d\omega,$$

où l'intégrale est étendue sur l'aire de ω , tend vers 0 (par un anneau circulaire entourant z_0 on entend chaque anneau $r \leq |z - \zeta_0| \leq R$ tel que $|z_0 - \zeta_0| < r$; cet anneau tend vers le point z_0 quand $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$). D'autre part, étant données deux suites de nombres réels positifs $\{r_n\}$, $\{\varphi_n\}$ et une suite de nombres complexes $\{u_n\}$ tendant vers 0, l'auteur appelle densité résiduelle (par rapport aux suites données) de la fonction f dans le point z_0 la limite

$$\frac{1}{R_n^4 - r_n^4} \int_{(\omega_n)} f(t) \cdot (t - \zeta_n) d\omega,$$

où l'intégrale est étendue sur l'aire de l'anneau circulaire ω_n : $r_n \leq |z - \zeta_n| \leq R_n$ tel que $\zeta_n - z_0 = u_n$, $R_n - r_n = \varphi_n$, entourant le point z_0 et tendant vers ce point. En se servant de ces notions l'auteur démontre une série des théorèmes concernant la différentiabilité des fonctions de variable complexe. Citons à titre d'exemple: Si une fonction continue f possède partout dans un domaine D une dérivée moyenne et si de plus sa densité résiduelle (prise par rapport aux suites $\{r_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{u_n\}$ fixées) existe et est nulle dans chaque point de D , la fonction f est holomorphe dans D . Saks.

Unkelbach, Helmut: Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist. *Math. Ann.* 115, 205—236 (1938).

Ist die Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und $|f(z)| < 1$, $f(0) = 0$, so ist nach einem Julia-Carathéodoryschen Satz die Winkelderivierte von $f(z)$ in einem Randpunkt ≥ 1 . Dieser Satz und das sog. Löwnersche Lemma werden nun für solche der Funktionen $f(z)$ verschärft, welche einen Wert w mit $0 < |w| < 1$ gar nicht oder nur an Kreuzungspunkten annehmen. Die Resultate sind alle genau, und die Extremalfunktionen werden bestimmt.

V. Paatero (Helsinki).

Bieberbach, Ludwig: Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. II. *S.-B. preuß. Akad. Wiss.* 1937, 359—365.

1. New proof and generalisation of the theorem of part I (*S.-B. preuß. Akad. Wiss.* 1929, 620—623, see also W. Fenchel, *ibid.* 1931, this Zbl. 2, 269). 2. The function $w = F(z) = pz/(p - z)$ ($0 < p < 1$): (a) is meromorphic and schlicht for $|z| < 1$, (b) has a pole at $z = p$, (c) satisfies $F'(0) = 1$. The image of $|z| < 1$ in the w -plane omits a circle of radius $p^2/(1 - p^2)$ and when $p \leq \sqrt{2} - 1$ this is the extremal case. For $p > \sqrt{2} - 1$ the extremal function is still algebraic, but more complicated, and the image in the w -plane omits a circle of radius $p(\sqrt{2} - 1)^2/(1 - p)^2$ together with a slit.

Macintyre (Aberdeen).

Ginzler, Ingeborg: Die Krümmung der Höhenlinien einer konformen Abbildung. *Deutsche Math.* 2, 401—416 (1937).

Let $f(z)$ be an analytic function of the complex variable z in the vicinity of $z = z_0$, such that $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \neq 0$. The transformation $w = f(z)$ carries then a certain

vicinity V of z_0 in a bi-unique and conformal manner into a vicinity V^* of $w=0$. Let k^* be a circle in the w -plane which passes through $w=0$ and denote by k the arc through $z=z_0$ which is carried into a sub-arc of k^* . Let J_k be the center of curvature of k for the point z_0 . The purpose of the paper is to prove and to discuss the following theorem. The locus of the points J_k which correspond to all the circles k^* (through $w=0$) with a given radius r is a conic section which has a focus at z_0 . The type of this conic section depends upon the magnitude of r . The paper closes with remarks concerning possible applications and concerning the relationships between the results and the theory of the Rundungsschranke. Tibor Radó (Columbus).

Aumann, Georg: *Konforme Abbildungen mit Ordnungseigenschaften*. Deutsche Math. 2, 574—576 (1937).

Let $z' = f(z)$ denote a conformal map of a convex region G in the z -plane on a convex region G' in the z' -plane. This map is called an L_m -map if the intersection of the image of every line segment L in G with every line segment L' of G' consists of not more than m components (maximal connected subsets). The case $m=2$ is the case that every L is mapped on a convex arc. The author shows that a conformal map $z' = f(z)$ is an L_2 -map if, and only if, after suitable similarity transformations on the variables z' and z , it can be represented by a univalent branch of one of the functions z^r (r real and different from zero and one), e^z , and $\log z$. Furthermore, if f_1, f_2, f_3, \dots are univalent conformal L_m -maps of the convex region G and if the sequence $\{f_n\}$ converges uniformly in every closed subregion of G to a function f , then f is a univalent conformal L_j -map with $j \leq m$. W. Seidel (Providence, R. I.).

Bergmann, Stefan: *Sur un lien entre la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe*. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1198—1200 (1937).

Bergmann, Stefan: *Sur un lien entre la théorie des équations aux dérivées partielles et celle des fonctions analytiques d'une variable*. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1360—1362 (1937).

Étant donné une équation

$$\Delta u + a \partial u / \partial x + b \partial u / \partial y + cu = 0 \quad (\Delta = \text{laplacien}), \quad (1)$$

où a, b et c sont des fonctions entières de x et de y , l'auteur annonce qu'il existe deux fonctions complexes $E_k(x, y, t)$ ($k=1, 2$), entières par rapport à x et à y , telles que la fonction

$$u = \int_{-1}^{+1} \sum_k E_k(x, y, t) f_k[(x + i^{2k-1}y)(1 - t^2)] \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

satisfasse à l'équation (1) quelles que soient les deux fonctions f_1 et f_2 , et toute solution u de (1) peut-être obtenue de cette façon. Cette représentation est étudiée sous plusieurs points de vue: conditions pour que les logarithmes des E_k soient certains polynômes en t ; allure de u au voisinage d'un point singulier quand les f_k sont méromorphes. La première note commence par l'indication très sommaire d'une représentation analogue pour les fonctions de n variables réelles qui satisfont à une équation du type elliptique; les fonctions analogues aux f_k dépendent alors de m variables complexes, avec $m < n$. La seconde note finit par la remarque qu'une représentation analogue s'applique à certaines équations du type hyperbolique. Georges Giraud.

Fuchs, B.: *Über geodätische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie*. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 567—593 (1937).

Eine unmittelbare Verallgemeinerung des Kreisabbildungssatzes und des Schwarz-schen Lemmas auf den Fall der ps. Abb. (pseudokonformen Abbildungen) ist bekanntlich unmöglich. Ausgehend von der Theorie der Orthogonalfunktionen kann man jedoch zu jedem Gebiet \mathfrak{B}^4 eine sog. „Kernfunktion“ $K(z, \bar{z})$, $z = \{z_1, z_2\}$ und „Minimalfunktion mit Aufpunkt in $\{t\}$ “ $M(z, t) = K(z, t)/K(t, t)$ konstruieren, ferner eine Methode der

„Heranziehung der Minimalaufgaben“ angeben. Die Einführung dieser Begriffe erlaubt bestimmte Beziehungen aufzustellen, welche bis zu einem gewissen Grad einen Ersatz für die anfangs erwähnten Sätze bilden. Mit Hilfe von $K(z, \bar{z})$ kann man in \mathfrak{B}^4 eine gegenüber den ps. Abb. invariante Metrik G , $ds^2 = \sum T_{m\bar{n}} dz_m d\bar{z}_n$, definieren (vgl. Bergmann, dies. Zbl. 6, 66 u. 10, 309), ferner in der Gesamtheit der aufeinander in bezug auf den Punkt $\{t\}$ normiert abbildbaren Gebiete \mathfrak{B}^4 , $\{t\} \subset \mathfrak{B}^4$, einen „Repräsentantenbereich“ $\mathfrak{R}^4(\mathfrak{B}^4, t)$ aussondern oder, was dasselbe bedeutet, in \mathfrak{B}^4 repr. Krd. (repräsentative Koordinaten) einführen [Bergmann, Math. Ann. 102, 430—446 (1930)]. — Im Falle der konformen Abb., wenn \mathfrak{B}^2 einfachzusammenhängend ist, ist $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{B}^2, t)$ ein Kreis. — Läßt \mathfrak{B}^4 eine Gruppe von ps. Abb. in sich mit dem Fixpunkt in $\{t\}$, so läßt, wie Aronszajn (dies. Zbl. 8, 76 u. 264) zeigte, $\mathfrak{R}^4(\mathfrak{B}^4, t)$ eine Gruppe von affinen (linearen) Transformationen in sich zu. — Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich unter Heranziehung der erwähnten Methoden mit den $\mathfrak{R}^4(\mathfrak{B}^4, t)$ im allgemeinen Falle. — Der Verf. untersucht zunächst die differentialgeometrischen Eigenschaften der Flächen \mathfrak{F}^2 , $\partial \lg M(z, t)/\partial t_1 + c \partial \lg M(z, t)/\partial t_2 = 0$, c eine Konstante. Jede v. g. a. F. (vollständig geodätische analytische Fläche) von G , die durch $\{t\}$ hindurchgeht, muß auf einer \mathfrak{F}^2 liegen, woraus er ein Verfahren erhält, sämtliche v. g. a. F. von G aufzustellen. Im allgemeinen Falle (also auch wenn in \mathfrak{B}^4 keine v. g. a. F. von G gibt) verschwinden die Komponenten $H_{mn}^{\cdot\cdot}$ des Tensors der erzwungenen Krümmung von \mathfrak{F}^2 in $\{t\}$. Benutzt man die in bezug auf $\{t\}$ repr. Krd. u_1, u_2 , so haben die \mathfrak{F}^2 die Form $u_1 + \alpha u_2 = 0$, α eine Konstante, woraus folgt, daß die $H_{mn}^{\cdot\cdot}$ der in bezug auf $\{t\}$ repr. Krd.-Flächen in $\{t\}$ verschwinden. Die in bezug auf $\{t\}$ repr. Krd. sind somit die natürlichen analytischen Krd. von G . (Die üblichen natürlichen Koordinaten von G sind nicht analytisch.) — Es werden die Fälle der Bereiche \mathfrak{B}^4 angegeben, wo v. g. a. F. von G existieren. — Ferner untersucht der Verf. die euklidische Krümmung $d\theta/ds = |f''| \cdot [1 + |f'|^2]^{-\frac{1}{2}}$ von \mathfrak{F}^2 und die „unitäre Krümmung“ $R = [\sum R_{hij\bar{k}} \bar{v}^h v^i \bar{v}^j v^k] \cdot [\sum T_{i\bar{k}} v^i \bar{v}^k]^{-2}$ von G in der analytischen Richtung, welche durch den Vektor $\{v^1, v^2\}$ gegeben ist. $d\theta$ bedeutet den analytischen Winkel zwischen den analytischen Tangentialebenen an \mathfrak{F}^2 im Punkte $\{z\}$ und $\{z + dz\}$, $z_2 = f(z_1)$ ist in der Gleichung von \mathfrak{F}^2 in dieser Form, $R_{hij\bar{k}}$ sind die Komponenten des Krümmungstensors von G . Durch die Heranziehung der anfangs erwähnten Minimalaufgaben zeigt der Verf., daß immer $R < 2$ ist und daß bei der Annäherung an den Rand in einer Reihe von Fällen $\lim R = -1$ gilt. — Es wird ferner die obere Grenze für das Unendlichwerden von $d\theta/ds$ bei der Annäherung an den Rand angegeben.

Stefan Bergmann (Tbilissi).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Lurquin, C.: Sur l'algèbre de la loi binomiale de probabilité. Mathesis 51, 399—404 (1937).

Lévy, Paul: Sur les exponentielles de polynomes et sur l'arithmétique des produits de lois de Poisson. Ann. École norm., III. s. 54, 231—292 (1937).

Die Abhandlung enthält im wesentlichen ausführliche Beweise einiger vom Verf. früher (dies. Zbl. 16, 127 u. 198) ohne Beweis angekündigter Ergebnisse. *Khintchine*.

Mises, R. v.: Bestimmung einer Verteilung durch ihre ersten Momente. Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 220—243 (1937).

Die ersten Momente $M_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu dV(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, m$) einer Verteilung seien vorgegeben; es wird untersucht, was sich daraus über den Erwartungswert $E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dV(x)$ einer vorgegebenen stetigen Funktion $f(x)$ schließen läßt. Zu-

nächst wird unter der Annahme, daß $f(x)$ eine monotone m -te Ableitung besitzt, für $E(f)$ eine obere oder untere Schranke aufgestellt, je nachdem $f^{(m)}(x)$ nicht zunehmend oder nicht abnehmend ist. Die Spezialfälle $m = 0, 1$ und 2 werden näher betrachtet; es wird gezeigt, daß sich in diesen Fällen aus der gewonnenen Abschätzung eine Reihe von bekannten sowie auch neuen Ungleichungen ableiten läßt. Für den allgemeinen Fall werden Schlüsse über den Verlauf der „Momentenlinie“ (M_ν als Funktion von ν) gezogen.

A. Khintchine (Moskau).

Gumbel, E. J.: Généralisation de l'inégalité de Boole. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 774—777 (1937).

E_1, E_2, \dots, E_n seien beliebige Ereignisse; $p(i_1, i_2, \dots, i_k)$ ($1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eines von den Ereignissen $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$ eintritt; dann ist

$$p(1, 2, \dots, n) \leq \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \sum p(i_1, i_2, \dots, i_k),$$

wo über alle möglichen Kombinationen der i_1, i_2, \dots, i_k summiert wird; bei $k = 1$ ist das die bekannte Boolesche Ungleichung (verallgemeinerter Additionssatz).

A. Khintchine (Moskau).

Krafft, M.: Zwei Sätze aus Gauss' Theoria combinationis observationum. Deutsche Math. 2, 624—630 (1937).

Gauss gave in articles 10 and 11 of his Theoria Combinationis, etc. two theorems on inequalities involving the moments of non-negative, monotone, non-decreasing functions, the second of which he did not prove. The author gives new proofs of generalizations of each of these theorems which exhibit a hitherto unnoticed connection between them. A brief proof on another generalization of the second theorem due to Faber is given also.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Bernstein, S.: Sur quelques modifications de l'inégalité de Tchebycheff. R. C. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 279—282 (1937).

Es seien z_1, z_2, \dots, z_n zufällige Größen, $E_{k-1}(z_k)$ bzw. $\beta_{k-1}(z_k)$ bedeute den Mittelwert bzw. die Streuung von z_k bei gegebenen z_1, z_2, \dots, z_{k-1} ; β_k sei die (unbedingte) Streuung von z_k und $B_n = \sum_{k=1}^n \beta_k$. Ist dann $E_{k-1}(z_k) = 0$ für alle möglichen Werte von z_1, z_2, \dots, z_{k-1} , so gelten die Sätze: 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für alle i ($1 \leq i \leq n$)

$$\left| \sum_{k=1}^i z_k \right| \leq t \sqrt{B_n}$$

gilt, ist größer als $1 - \frac{1}{t^2}$. 2. Ist für alle k und alle möglichen Werte von z_1, z_2, \dots, z_{k-1}

$$\frac{\beta_{k-1}(z_k)}{\beta_k} \leq R_k,$$

und gibt es eine Zahl H , so daß für alle k , alle $l > 0$ und alle möglichen Werte von z_1, z_2, \dots, z_{k-1}

$$E_{k-1}(z_k^l) \leq \frac{\beta_{k-1}(z_k)}{\beta_k} H^{l-2} l!$$

gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens aller Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^i z_k < 2t \sqrt{B'_n} \quad (1 \leq i \leq n)$$

größer als $1 - e^{-t^2}$, wo $B'_n = \sum_{k=1}^n R_k \beta_k$ gesetzt und $0 < t \leq \frac{\sqrt{B'_n}}{2H}$ vorausgesetzt ist. —

Es sei bemerkt, daß 1. schon von P. Lévy (vgl. S. 233—234 des in dies. Zbl. 16, 170 ref. Werkes) bewiesen war.

A. Khintchine (Moskau).

Marcinkiewicz, J., et A. Zygmund: Remarque sur la loi du logarithme itéré. Fundam. Math. 29, 215—222 (1937).

Nach Kolmogoroff [Math. Ann. 101, 126—135 (1929)] gilt der Satz vom iterierten

Logarithmus für eine Folge $\{x_n\}$ beschränkter gegenseitig unabhängiger zufälliger Größen mit verschwindenden Mittelwerten unter der Annahme

$$M_n = o \sqrt{B_n / \lg \lg B_n},$$

wo $M_n = \text{Max} |x_n|$ ist und B_n die Streuung von $\sum_1^n x_k$ bedeutet. Hier wird durch ein Beispiel gezeigt, daß $M_n = O \sqrt{B_n / \lg \lg B_n}$ dazu nicht ausreicht. *A. Khintchine.*

Bahn, Rudolf: Über den Grenzwert der Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse. Deutsche Math. 2, 698—708 (1937).

Beweis des Poissonschen Grenzwertsatzes für gewisse einfache Schemata, die als Verallgemeinerungen des Bernoulli-Poissonschen Falls „seltener Ereignisse“ betrachtet werden können. Es handelt sich um das Grenzesetz bei $n \rightarrow \infty$ für Summen der Form $x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn}$, wo die gegenseitig unabhängigen zufälligen Größen x_{kn} nur der Werte 0 und 1 fähig sind. *A. Khintchine (Moskau).*

Fouillade, A.: Sur une conception de la théorie des probabilités en chaîne. Bull. Sci. math., II. s. 61, 269—287 et 295—302 (1937).

Le premier chapitre est consacré à l'étude directe de l'allure asymptotique des probabilités $P_{ij}^{(n)}$ dans le cas d'une chaîne de Markoff ordinaire. Les résultats de cette étude sont à peu près les mêmes que par exemple chez W. Doeblin (ce Zbl. 14, 222 et 16, 411). Dans le second chapitre l'auteur considère le cas où l'ensemble des états possibles est un ensemble borné et fermé d'un espace à n dimension. Sous quelques hypothèses restrictives on obtient ici des résultats analogues au cas des chaînes de Markoff ordinaires. *A. Kolmogoroff (Moscou).*

Doeblin, W., et Robert Fortet: Sur des chaînes à liaisons complètes. Bull. Soc. Math. France 65, 132—148 (1937).

Den Gegenstand der Untersuchung bilden Markoffsche Ketten unendlich hoher Ordnung; ist das System einer endlichen Anzahl von Zuständen E_i ($1 \leq i \leq n$) fähig, so handelt es sich also um den allgemeinsten Fall, in dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung wesentlich von der ganzen Vorgeschichte des Systems abhängt. Es werden verschiedene Zusatzbedingungen eingeführt, die im wesentlichen zum Ausdruck bringen, daß die erwähnte Verteilung von sehr entfernten Zuständen nur schwach abhängen soll; unter diesen Annahmen gelten gewisse Grenzwertsätze, die denjenigen für Markoffsche Ketten endlicher Ordnung analog sind. *A. Khintchine (Moskau).*

Doeblin, W.: Sur l'équation de Smoluchowsky. Prakt. Akad. Athénon 12, 116—119 (1937).

Verf. behandelt die zufallsmäßige Bewegung eines Punktes in einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum R . Bedeutet $x(F)$ eine gleichmäßig stetige Punktfunktion in R und $X(E, t)$ die zufällige Größe, deren Wert mit $x(F)$ zusammenfällt, wenn der von E ausgehende wandernde Punkt sich nach einer Zeitstrecke t in F befindet, so gilt unter gewissen Voraussetzungen allgemeiner Natur betreffend die Übergangswahrscheinlichkeiten eine Reihe von Sätzen, die Verf. ohne Beweis angibt. Als Beispiele mögen dienen: 1. $X(E, t)$ genügt in bezug auf t mit der Wahrscheinlichkeit 1 einer verallgemeinerten Hölderschen Bedingung; 2. $X(E, t)$ ist in bezug auf t mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Riemannschen Sinne integrierbar. Weitere Aussagen betreffen die Beziehungen von $X(E, t)$ zu den vom Verf. früher eingeführten „ensembles finaux“ (vgl. dies. Zbl. 16, 311). *A. Khintchine (Moskau).*

Kullback, Solomon: On certain distributions derived from the multinomial distribution. Ann. math. Statist. 8, 127—144 (1937).

If on a single trial any one of n mutually independent events may occur and if there be N trials in all, this paper derives the distribution of the number of events which do not occur at all, of the number which occur once, etc., and also the correlation function of the number of events which occur r times and the number which occur

s times. Factorial moments are derived for these distribution functions and numerical comparisons with empirically obtained distributions are given. The paper could have been shortened if well-known distribution theory had been appealed to for some of the preliminary results.

C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Dugué, Daniel: Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l'étude des diverses questions d'estimation. J. École polytechn., III. s., Nr 4, 305—373 (1937).

Cette thèse contient les démonstrations complètes de plusieurs assertions que l'auteur a fait à propos de la méthode de „maximal likelihood“ de M. R.-A. Fisher (voir ce Zbl. 14, 29 et 10, 173); il s'agit de l'applicabilité de la loi des grands nombres (convergence en probabilité et convergence presque sûre) et de la loi-limite de Gauss à l'estimation fournie par cette méthode. Parmi toutes les estimations gaussiennes à la limite, celle qu'on considère offre la plus grande précision (théorème de M. Doob); en considérant la corrélation entre deux estimations gaussiennes différentes, l'auteur parvient à démontrer que l'estimation de „maximal likelihood“ est la seule jouissant de cette propriété. Un dernier chapitre est consacré aux estimations dites exhaustives. L'auteur considère plusieurs généralisations: cas d'expériences mutuellement dépendantes, estimation simultanée de plusieurs paramètres, etc. A. Khintchine (Moscou).

Jeffreys, Harold: On the smoothing of observed data. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 444—450 (1937).

The author considers the problem of reducing errors in individual data where no prescribed analytic form for a curve of regression suggests itself. The method used by Comrie and the author, of reducing data by one twelfth of the fourth difference tends to produce unwarranted smoothness. The author investigates the choice of suitable values of x , so that the values of some higher moments need not be prejudged, in computing and correcting the lower moments. The method seems suggestive of Gauss' method of interpolation by best abscissas. Numerical examples are given for the use of two chosen abscissas, where curvature is to be left free from prescription.

Albert A. Bennett (Providence).

Neyman, J.: „Smooth test“ for goodness of fit. Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 149—199 (1937).

It is proposed that a test of goodness of fit, i.e., a test of the hypothesis that a given set of observations were obtained at random from a population governed by a specified distribution law, be set up with reference to the set of admissible alternative hypotheses in such a way that while the chance of rejecting an admissible hypothesis if it be true shall be a preassigned quantity, the chance that if it be false the fact will be detected will be as large as possible. If H_0 represent the hypothesis to be tested and $p(x|H_0)$ the corresponding probability law, in this paper the class of alternative hypotheses is restricted to those whose graphs are smooth curves with few intersections with the graph of $p(x|H_0)$. To deal with the difficulty due to different functional forms which may be included in the set of alternative hypotheses, the set of observed values x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, are replaced by new values, defined by the relation,

$y_i = \int_{-\infty}^{x_i} p(x|H_0) dx$, and then the set of alternative hypotheses includes only probability

laws which may be written in the form $p(y|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = c e^{\sum_{i=1}^k \theta_i \Pi_i(y)}$, $0 < y < 1$, in which $\Pi_i(y)$ is the i -th transformed Legendre polynomial, and which represent smooth curves for moderate values of K . (For H_0 , $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = 0$.) The investigation turns on the determination of the unbiased critical region (see this Zbl. 14, 321), which specifies the test sought, which is accomplished for the case of large samples. This solution and the corresponding power function are discussed and numerical illustrations are given.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Kerrieh, J. E.: Least squares, and a generalisation of the „Student“-Fisher theorem. Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 244—251 (1937).

The author adapts a method given by Steffensen in giving his proof of the Student-Fisher theorem (see this Zbl. 14, 269) to obtain another proof of the generalization of this theorem applicable to the variance of residuals obtained in the adjustment of observations by the method of least squares. *C. C. Craig.*

Wiśniewski, Jan K.: A problem in least squares. Ann. math. Statist. 8, 145—148 (1937).

The author considers the problem of determining by the method of least squares, a regression curve for grouped data, with ordinate as a polynomial of given order in the abscissa. The practical work involved in solving the resulting normal equations is greatly reduced by expanding the polynomial in terms of polynomials algebraically orthogonal. A specially convenient case is when at least the moments of the observed variates do not change from group to group. In less convenient cases described approximate methods involving successive corrections have been found to yield satisfactory results. *Albert A. Bennett (Providence).*

Zoch, Richmond T.: Reply to Mr. Wertheimer's paper. Ann. math. Statist. 8, 177—178 (1937).

The author's reply to Wertheimer's criticism (see this Zbl. 17, 125) of his paper (see this Zbl. 13, 174) in which he attacked the proof of the postulate of the arithmetic mean given by Whittaker and Robinson in their, "Calculus of Observations", seems to turn largely on whether or not the word "everywhere" is to be read into axiom IV of that proof. But Zoch maintains that even if the first derivatives of the most probable value with respect to the individual observations are to be everywhere continuous, Whittaker and Robinson's proof is still faulty. *C. C. Craig.*

„Student“: Comparison between balanced and random arrangements of field plots. Biometrika 29, 363—379 (1938).

Neyman, J., and E. S. Pearson: Note on some points in „students“ paper on „comparison between balanced and random arrangements of field plots“. Biometrika 29, 380—388 (1938).

Geometrie.

Analytische und algebraische Geometrie:

● **Abramescu, N.:** Vorlesungen über analytische Geometrie mit Einschluß einer elementaren Einleitung in die analytische Untersuchung der nichteuklidischen Geometrien und die elementaren Begriffe der Vektorgeometrie. Mit einem Vorwort von G. Titeica. Cluj: Edit. Univ. 1937. 655 S. Lei 520.—. [Rumänisch].

As indicated by the title this book is composed of three distinct parts. The first, which is the main part (495 pages), presents a thorough treatment of conics and quadrics with a wealth of detail reminding the reader of Ernesto Cesàro's classical books. Free use is made of homogeneous coordinates, ideal and imaginary elements as well as synthetic reasonings. The second part (78 pages) is devoted to Cayley's geometry with a quadric as the absolute of space, the usual additional reality assumptions leading to the various non-euclidean geometries. The discussion includes euclidean models of non-euclidean geometries, groups of rigid motions as automorphisms of the fundamental quadric, as well as the basic ideas leading to general Riemannian geometry. The third and last part (79 pages) is devoted to vector geometry, vector algebra and sufficient material of vector calculus to allow applications to the differential geometry of plan and skew curves. *I. J. Schoenberg (Waterville, Maine).*

Leiner, Gustav: Zur Theorie der Ortskurven. Arch. Elektrotechn. 32, 52—58 (1938).

In der Elektrotechnik werden die sog. Ortskurven gebraucht, die üblicherweise in der komplexen Ebene ($z = x + iy$) als komplexe Funktionen eines reellen Para-

meters p geschrieben werden; beziffert man jeden Kurvenpunkt mit der Zahl p , so handelt es sich eigentlich um die Parameterdarstellung krummliniger Skalen. Die Gl. $z = (a + bp + cp^2) : (d + ep + p^2)$, worin die Koeffizienten i. a. komplex sind, gibt als Trägerkurve eine bizirkuläre, rationale Quartik, die als Unterfälle die zirkuläre Kubik, die Kegelschnitte und die Gerade enthält. Verf. zeigt, wie man aus diesen Gleichungen die betreffenden Trägerkurven konstruktiv ermittelt und nachträglich die Skala auf der gezeichneten Kurve anbringt. Die gefundene Konstruktion für die Quartik ist allerdings ihre bekannte Erzeugung als Kissoide zweier Kreise (s. H. Wieleitner, Spezielle Ebene Kurven, 1908, S. 4.). Die angegebenen Konstruktionen der projektiven Skalen auf den einzelnen Kegelschnittsformen lassen nicht den einheitlichen, vereinfachenden Grundgedanken klar hervortreten. *Eckhart (Wien).*

Jolles, Stanislaus: Die charakteristischen Hauptachsen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen scheidtelrechten Hyperboloide. J. reine angew. Math. 178, 65—106 (1937).

Die Abhandlung bildet entwicklungsmäßig und methodisch eine organische Reihe mit früheren Arbeiten des Verf. Die wichtigsten Punkte dieses zur Erforschung der linearen Kongruenz zurückgelegten Weges sind gekennzeichnet durch: Die Fokalthetheorie der linearen Strahlenkongruenz (Math. Ann. 63), Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz (Math. Z. 27), Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz (Math. Z. 33; dies. Zbl. 2, 146), Die Metrik im polaren F^2 -Gebüsche einer lin. Strahlenkongruenz (Math. Z. 36; dies. Zbl. 5, 74), Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer lin. Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades (J. reine angew. Math. 172; dies. Zbl. 10, 33). Die Kenntnis dieser Arbeiten wird im wesentlichen vorausgesetzt. Die schon früher behandelten einscharig in der Kongruenz enthaltenen scheidtelrechten Hyperboloide besitzen je eine Hauptachse als Träger einer symmetrischen Involution von Durchmesserebenen. In der jetzigen Arbeit, die eine Anzahl eigenartiger neuer Sätze enthält, werden die charakteristischen Hauptachsen aller scheidtelrechten Hyperboloide der linearen Kongruenz konstruiert. Sie erfüllen eine quadratische Kongruenz, deren Eigenschaften auf diesem Wege ermittelt werden. Im Anschluß daran betrachtet der Verf. die Hauptachsen aller einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades. Sie bilden einen schon bekannten speziellen quadratischen Strahlenkomplex, den Hauptachsenkomplex Γ^2 der linearen Kongruenz. Ein gegebener Komplexstrahl s von Γ^2 ist Hauptachse einer einzigen einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Fläche F^2 zweiten Grades. Die beiden Eichpunkte von s , d. h. die beiden Schnittpunkte der Achse s mit F^2 , werden ermittelt. Mit dem Hauptachsenkomplex Γ^2 über sieht man daher jetzt die von seinen Strahlen getragenen Scheitelpunkte und Asymptotenebenen der in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades. Der zweite Abschnitt behandelt die einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Strahlenparaboloide, insbesondere ihre Beziehungen zu den oben untersuchten scheidtelrechten Hyperboloiden. Den Ausgangspunkt bildet dabei die orthogonale Verknüpfung zwischen dem Fokalparaboloid und dem Hauptachsenzyklindroid der durch die Kongruenz gehenden ∞^1 linearen Komplexe. Die charakteristischen Hauptachsen der scheidtelrechten Hyperboloide sind Tangenten des Hauptachsenzyklindroides und stehen in ihren Berührungspunkten auf den Regelstrahlen desselben senkrecht. *Haenzel.*

Vakselj, Anton: Kreiskurven zweiter Ordnung. Math. Z. 43, 573—617 (1938).

Als Kreiskurven 2. Ordnung werden hier die bizirkulären elliptischen Kurven 4. Ordnung und die zirkulären elliptischen Kurven 3. Ordnung bezeichnet; sie bilden zusammen eine Klasse von Kurven, die von allen Transformationen der Gruppe der reziproken Radien in sich selbst verwandelt wird. Um diese Kurven, dem Kleinschen Erlanger Programm gemäß, in Beziehung zu jener Gruppe zu untersuchen, ist es zweckmäßig, ihre Gleichung in folgender Form anzunehmen:

$$f(u\bar{u}) = Au^2\bar{u}^2 + 2Bu^2\bar{u} + 2\bar{B}u\bar{u}^2 + Cu^2 + 4Du\bar{u} + \bar{C}\bar{u}^2 + 2Eu + 2\bar{E}\bar{u} + F = 0,$$

wo $u = x + iy$, $\bar{u} = x - iy$. Im 1. Abschnitt wird eine Reihe von Invarianten und Kovarianten der Kurve $f = 0$ ausgerechnet; sie stimmen mit denjenigen der doppelt-quadratischen Formen überein und sind als solche schon längst bekannt; ihre Theorie wird hier aber auf einem anderen Wege entwickelt. Besonders bemerkenswert: die quadratische Invariante $I_2 = 2D^2 + AF + C\bar{C} - 2(B\bar{E} + \bar{B}E)$; die kovariante Kreiskurve 2. Ordnung $h = \frac{1}{4} \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}} - \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right)$; die kubische Invariante I_3 , welche die Polarenbildung von f, h bedeutet; die Invariante 4. Grades I_4 , d. h. die quadratische Invariante von h ; die beiden Diskriminanten b, \bar{b} von $f = 0$ als Gleichung in u oder \bar{u} ; eine so beschaffene Kovariante k , daß $h^2 - fk = b\bar{b}$; die Invarianten $g_2 = \frac{1}{12}(4I_2^2 - 3I_4)$, $g_3 = \frac{1}{216}(9I_2I_4 - 8I_3^2 - 54I_3^3)$ usw. Als Anwendungen: die Bedingung, unter welcher $f = 0$ ihr Geschlecht erniedrigt, die Uniformisierung von $f = 0$, die gemeinsamen Invarianten von $f = 0$ und einem Kreis. — Im 2. Abschnitt, auf Grund der vier bekannten Inversionskreise von $f = 0$, werden für f verschiedene kanonische Gleichungen gefunden. Die wichtigste ist die „spirische Form“ ($B = \bar{B} = E = \bar{E} = 0$, $C = \bar{C}$), die man erhält, wenn man zwei der Inversionskreise auswählt und in die zwei Koordinatenachsen transformiert. Es folgt, daß I_2, I_3, I_4 ein vollständiges Invariantensystem von $f = 0$ bilden. — Im 3. Abschnitt werden verschiedene allgemeine Eigenschaften von $f = 0$ an der spirischen kanonischen Form untersucht, so die gegenseitige Lage der reellen Brennpunkte und Inversionskreise und die Definition von $f = 0$ durch eine einfache invariante Winkeleigenschaft: $f = 0$ ist Ort der Schnittpunkte von zwei Kreisen K_1, K_2 , die einen festen Kreis K in festen Punkten schneiden und mit K solche Winkel $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ bilden, daß $\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = 1$ ist. — Im 4. Abschnitt werden die Beziehungen von $f = 0$ zu einzelnen Kreisen untersucht; es bietet sich hier eine kontinuierliche Gruppe von Kreistransformationen, die jedem Punkt von $f = 0$ einen Kreis entsprechen lassen, der $f = 0$ daselbst berührt. — Im 5. Abschnitt werden die Kreiskurven betrachtet, die dieselben Inversionskreise besitzen wie f ; sie bilden das Netz $\lambda f + \mu h + \nu k = 0$. — Im 6. Abschnitt die geometrische Deutung der Gleichungen $g_2 = 0, g_3 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0, I_4 = 0$; ist z. B. $I_3 = 0$, so entsteht $f = 0$, wenn man einen geeigneten Kreis der Transformation $z = u + \frac{1}{u}$ unterwirft. Auch der

Ort der Schnittpunkte von zwei orthogonalen Kreisen, die durch die festen Punkte u_1, u_2 bzw. u_3, u_4 hindurchgehen, ist eine $f = 0$ mit $I_3 = 0$. — Im 7. Abschnitt wird die „Spiegelung“ S an $f = 0$ untersucht; sie wird durch die Gleichung $f(v\bar{u}) = 0$ als Transformation zwischen u, v definiert; jedem allgemeinen u entsprechen zwei v . Die Potenzen S^{2m+1} sind wieder Spiegelungen an Kreiskurven 2. Ordnung und werden Transformationen 2. Art genannt; die geraden Potenzen S^{2m} werden Transformationen 1. Art genannt. Eine elegante Rechnung führt zu allgemeinen Formeln für S^n ; es ist möglich, S^n von einer einzigen Invariante $q_n(I_2I_3I_4)$ abhängen zu lassen; ein Vergleich der rekurrierenden Formel für q_n mit derjenigen für die Funktion $\sigma(nz)/[\sigma(z)]^n$ der Theorie der elliptischen Funktionen zeigt, daß q_n mit jener Funktion übereinstimmt; hier ist z eine transzendente Invariante von $f = 0$; I_2, I_3, I_4 stimmen, von numerischen Faktoren abgesehen, mit $\wp(z; g_2, g_3)$, $\wp'(z; g_2, g_3)$, $\wp''(z; g_2, g_3)$ überein. — Im 8. Abschnitt werden schließlich die Steinerschen Sätze über Schließungspolygone von $f = 0$ bewiesen; so besitzt $f = 0$ einen und daher unendlich viele eingeschriebene Vierecke, wenn $I_3 = 0$ und umgekehrt; im allgemeinen besitzt $f = 0$ einen und daher unendlich viele eingeschriebene $2n$ -Ecke, wenn $q_n = 0$ und umgekehrt. E. G. Togliatti.

Popa, Ilie I.: Sur quelques singularités des courbes planes. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 5–17 (1938).

Ce travail donne les démonstrations des résultats énoncés dans une Note précédente [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25 (1937); this Zbl. 16, 373]. — A la bibliographie du sujet on peut ajouter: B. Segre, C. R. Acad. Sci., Paris 184, 729 (1927) (où il y a déjà la cubique nodale osculatrice dans un nœud, et les applications à la

géométrie projective différentielle des surfaces retrouvées plus tard par Strazzeri, qu'ici sont exposées au n. 2); B. Segre, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 9, 970 (1929) (ou sont étudiées les courbes planes avec tac-noeud, au voisinage de ce point). — Les ordres des contacts envisagés à p. 11 du travail en question, doivent tous être augmentés d'une unité.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur une surface algébrique de diviseur deux déduite de la surface de Veronese. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 830—833 (1937).

Enriques, F.: Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 193—197 (1937).

L'Auteur expose une simple méthode, avec laquelle — en connaissant sur une surface F irrégulière deux courbes A et A' , infiniment voisines entre elles et non équivalentes — on peut construire, dans les voisinages du 2^{ème}, 3^{ème}, ... ordre de A , des courbes A'' , A''' , ... telles que: $A' - A \equiv A'' - A' \equiv A''' - A'' \equiv \dots$; il traite auparavant la question analogue concernant les groupes de points sur une courbe algébrique. Il semble au réf. que, pour l'application — indiquée par l'Auteur — à la démonstration rigoureuse de la propriété caractéristique des surfaces irrégulières [pour laquelle cfr. aussi F. Enriques, Rend. Accad. Sci. Bologna 9, 5 (1904); Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23 (1936); this Zbl. 14, 364; Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1 (1936); this Zbl. 15, 40, 228], on devrait montrer comment ladite méthode peut être appliquée à partir d'une courbe A assignée sur une surface F irrégulière (en donnant une signification tangible, ne faisant pas intervenir la variété de Picard de F , à l'existence sur F d'une courbe A' infiniment voisine et non équivalente à A).

Beniamino Segre (Bologna).

Bassi, Achille: Su di alcune formole di geometria delle varietà algebriche. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 107—123 (1936).

L'auteur introduit d'abord les correspondances combinatoires d'indices $(1, \alpha')$ entre deux n -complexes A et A' , généralisant les involutions sur un complexe récemment étudiées par P. A. Smith [Proc. Nat. Acad. Sci. 19 (1933); ce Zbl. 7, 82] et M. Richardson [Duke math. J. 1 (1935); ce Zbl. 11, 179]; si D_i est le sous-complexe de diramation d'ordre i ($= 1, 2, \dots, \alpha' - 1$), c'est-à-dire l'ensemble des simplexes de A admettant sur A' au plus $\alpha' - i$ simplexes homologues distincts, entre les invariants P d'Euler-Poincaré des complexes envisagés subsiste la relation simple

$$P(A') = \alpha' P(A) - P(D_1) - P(D_2) - \dots - P(D_{\alpha'-1}),$$

dans laquelle on doit poser $P(D_i) = 0$ si D_i est vide. Si l'on a une correspondance algébrique K d'indices $(1, \alpha')$ entre deux variétés algébriques A, A' de dimension (complexe) n , dépourvue d'éléments fondamentaux, on peut réticuler les riemaniennes de A, A' moyennant deux complexes convenables, de façon que K donne lieu à une correspondance combinatoire entre ceux-ci, à laquelle on peut appliquer la formule précédente; en se servant de la relation bien connue d'Alexander, d'ici découle un lien entre les invariants de Zeuthen-Segre de A, A' et des variétés de diramation des différents ordre de la correspondance K . Ce résultat est ensuite étendu aux correspondances algébriques d'indices (α, α') ayant des éléments fondamentaux quelconques; la formule, relativement compliquée, à laquelle on parvient de la sorte, comprend pour $n = 1, 2, 3$ des relations qui resp. ont été données par H. G. Zeuthen [Math. Ann. 3 (1871)], F. Severi [Rend. Ist. Lomb., II. s. 36 (1903)] et G. Tafani [Ann. Scuola norm. super. Pisa, I. s. 12 (1913); pour $n = 3$ cfr. aussi B. Segre, Mém. cour. Acad. Roy. Belg., II. s. 14 (1936)].

Beniamino Segre (Bologna).

Differentialgeometrie:

Samelson, Hans: Über die Drehung der Tangenten offener ebener Kurven. Compositio Math. 5, 284—291 (1937).

Es wird folgender Satz bewiesen: Es sei C eine doppelpunktfreie, beiderseits ins Unendliche laufende, stetig differenzierbare Kurve in der Ebene. Dann gibt es zu

jedem endlichen Teilbogen b von C und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Teilbogen von C , der b enthält und dessen Totalkrümmung (= Änderung der Tangentenrichtungsfunktion) $< \pi + \varepsilon$ ist. Der Beweis wird auf den entsprechenden „Umlaufssatz“ für geschlossene Kurven und den „Sehnenrichtungssatz“ gestützt (vgl. Ostrowski und Hopf, dies. Zbl. 11, 177). (Für das sehr viel tiefer liegende zweidimensionale Analogon des Satzes vgl. Cohn-Vossen, dies. Zbl. 8, 30; 11, 225.) *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Hofmann, H.: Die Anwendung einer Transformation von Bianchi auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders zur Erzeugung neuer Kurven konstanter Torsion. Tübingen: Diss. 1937. 34 S.

Durch die genannte Transformation lassen sich aus einer Kurve konstanter Torsion unendlich viele Kurven derselben konstanten Torsion erzeugen. Geht man dabei von der Schraubenlinie des Kreiszylinders aus, so lassen sich die erhaltenen neuen Kurven alle durch eine Schraubung ineinander überführen. Wendet man die Transformation nochmals auf die Kurven der erhaltenen Schar an, so besteht zwischen den neuen Kurven kein so einfacher Zusammenhang. *Kamke* (Tübingen).

Dingel, Martin: Über ebene Schnitte, die durch eine Gerade einer Fläche gehen. Halle a. d. S.: Diss. 1937. 35 S.

Oraw, Alexis: Über dreifache Flächensysteme, deren Schnittkurven dreifach-rhombische geodätische Netze bilden. Würzburg: Diss. 1937. 60 S.

Schelling, H. v.: Darstellung der Krümmung von Kurven und Flächen durch Differentialausdrücke 1. Ordnung. Deutsche Math. 2, 675—681 (1937).

Vermöge einer bzw. zweier unnormierter Stützfunktionen (d. h. Entfernungen der Tangente bzw. Tangentenebene zu gewissen festen Punkten) als unabhängige Parameter auf einer ebenen Kurve bzw. Fläche beherrscht der Verf. in überraschend knapper, übersichtlicher und einheitlicher Weise den entsprechenden differentialgeometrischen Formelapparat. Bei dieser Parameterwahl wird die Ordnung der Differentialquotienten in den Ausdrücken der meisten invarianten Größen um eine Einheit herabgesetzt. — Aus der Gesamtheit der Ergebnisse erwähnen wir nur das folgende: Heißen P , O_i und l_i ($i = 1, 2$) der laufende Punkt auf einer Fläche, die Pole der Darstellung und die Stützfunktionen, und setzt man $w_i = \overline{OP_i^2}$, so hat die Fläche konstantes Krümmungsmaß, sobald die Abbildung $(l_1, l_2) \leftrightarrow (w_1, w_2)$ eine flächentreue ist. — Das Ende der Arbeit weist auf Konstruktionen verschiedener differentialgeometrischer Größen hin, die ausschließlich von in der Tangentenebene enthaltenen Vektoren ausgehen. *D. Barbilian* (București).

Rellich, Franz: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung. Math. Z. 43, 618—627 (1938).

Zwei Flächen F und F' negativer Gaußscher Krümmung K mögen einen Streifen S gemeinsam haben, dessen Flächenelement nirgends Schmiegeebene ist. Zieht man von zwei Punkten von S nach derselben Seite die beiden Asymptotenlinien, so mögen F und F' in den erhaltenen Schnittpunkten dieselbe Krümmung haben. Dann ist F identisch mit F' . Ferner gilt der Existenzsatz, daß man $K = K(u, v) < 0$ beliebig vorschreiben kann im Sinne einer natürlichen Gleichung, d. h. so, daß die Kurven $u, v = \text{konst.}$ Asymptotenlinien werden und S vermöge der Bogenlänge s auf $u = v = s$ abgebildet wird. — Ähnliches gilt auch im Falle $K > 0$ mit einem isothermen System an Stelle der Asymptotenlinien und auch für die mittlere Krümmung, wobei dann die isotropen Linien benutzt werden. — Beweis durch Zurückführung auf ein Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen. *W. Feller* (Stockholm).

Tzénoff, Iv.: Sur les surfaces admettant un élément linéaire ds^2 donné. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 33, 163—190 u. franz. Zusammenfassung 191—194 (1937) [Bulgarisch].

L'article contient la théorie bien connue de la détermination des surfaces à l'aide de deux formes quadratiques. *S. Finikoff* (Moscou).

Tzénoff, Iv.: Sur les surfaces réglées et leur application à la théorie des surfaces. II. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 33, 195—235 u. franz. Zusammenfassung 236—241 (1937) [Bulgarisch].

L'article contient la théorie élémentaire des congruences de droites et des surfaces réglées.

S. Finikoff (Moscou).

● **Finikoff, S. P.:** Biegungen der Hauptbasis und die mit ihr verbundenen geometrischen Aufgaben. Moskau u. Leningrad: Vereinigt. Wiss.-Techn. Verl. 1937. 176 S. u. 5 Abb. [Russisch].

Es wird eine systematische Darstellung dieses Abschnittes der Flächentheorie (begründet von K. Peterson [1828—1881]) gegeben. Im I. Kap. werden konjugierte Kurvennetze, die bei einer (stetigen) Biegung der Fläche erhalten bleiben, betrachtet (nach der von dem Verf. verwendeten Terminologie „Hauptbasis dieser Biegung“). Die Frage über die Bestimmung aller solcher Netze auf einer Fläche. Spezielle Typen dieser Netze. Fall der Flächen zweiter Ordnung. Flächen mit unendlich vielen Netzen gegebener Art. Das II. Kap. beschäftigt sich mit der Bestimmung dieser Netze vermittels quadratischer Lösungen der Moutardschen Differentialgleichung. Allgemeine Theorie. Spezielle Fälle. Flächen mit Netzen gegebener Art, die aus ebenen, konischen oder zylindrischen Linien zusammengesetzt sind. (Eine zum konjugierten Netze gehörige Kurve ist konisch [bzw. zylindrisch], wenn die Tangenten in ihren Punkten zu den Kurven der konjugierten Familie einen Kegel bilden.) Im Kap. III beschäftigt sich der Verf. mit den Flächen von Bianchi (ihre Bestimmung ist der der quadratischen Lösungen der Moutardschen Differentialgleichung äquivalent). Weiter werden die Transformationen von Eisenhardt und Peterson betrachtet. Unendlich kleine Biegungen der Fläche und assoziierte Fläche. Typen der Flächen von Bianchi. Das IV. Kap. behandelt die Biegungen der mit der Fläche verknüpften Strahlenkongruenzen mit Erhaltung aller ihrer abwickelbaren Flächen. (Jede Gerade der Kongruenz ist fest mit einem Trieder, der aus der Normalen und den Tangenten zu den Linien eines Netzes besteht, verbunden. Bei der Biegung der Fläche deformieren sich offenbar auch alle solche Kongruenzen.) Das zyklische Kreissystem und die zyklische Kongruenz von Ribaucour. Die Transformationen von Ribaucour. Im V. Kap. werden die Vossischen Flächen behandelt. Die Kongruenz von Guichard. Biegungen, bei denen die Asymptotenlinien der Fläche in ein konjugiertes Kurvennetz übergehen. Das VI. Kap. ist den Biegungen mit Erhaltung eines kinematisch konjugierten Netzes gewidmet.

B. Fuchs (Woronesch).

Mayer, O.: Étude des réseaux plans en géométrie centro-affine. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 57—71 (1938).

Die zentroaffine Geometrie der ebenen Kurvennetze wird nach dem Vorbild der entsprechenden projektiven Untersuchungen von E. Čech (Fubini-Čech, Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces) entwickelt. Nach der Aufstellung der Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen werden invariante Differentialformen und Funktionen bestimmt und geometrisch gedeutet. — Die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bilden die Begriffe der zentroaffinen Abwickelbarkeit und der Konformität zweier Netze, aus denen Verf. eine *Z-A*-Metrik gewinnt. Die einfachsten Netze (kartesische Netze) bestehen aus zwei Scharen paralleler Geraden. Ein beliebiges Netz (x) wird längs einer Kurve C von einem zweiten Netz (y), welches auf ein kartesisches Netz abwickelbar ist, berührt [d. h. in den Punkten von C haben die Kurven von (y) und (x) gleiche Tangenten]. Durch die Abwicklung von (y) gelangt Verf. zu einer Parallelverschiebung und zur „geodätischen Krümmung“ von C . Den Schluß bilden Untersuchungen über eine mit dem Netz invariant verbundene Geradenkongruenz.

W. Haack (Karlsruhe).

Vincensini, Paul: Sur une propriété caractéristique des transformations conformes du plan. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 946—947 (1937).

Un système cyclique K normal à un plan p établie sur celui-ci une transformation

ponctuelle (C) qui fait correspondre les points M, M' où le cercle générateur de K perce le plan p . Si l'on associe à chaque couple M, M' deux points N, N' tels que la figure ($MM'NN'$) ait une forme invariable, les points N, N' définissent une transformation $\mathfrak{C}(C)$, transformée de C par \mathfrak{C} , dont les formules sont de la forme $\zeta = z + ke^{i\theta}(z' - z)$, $\zeta' = z' + he^{i\varphi}(z' - z)$ où z, z', ζ, ζ' sont les affixes de M, M', N, N' et k, h, θ, φ sont quatre constantes arbitraires. Les transformations $\mathfrak{C}_1(C)$ caractérisées par la relation $k \sin \theta - h \sin \varphi = 0$, laissent à C son caractère, donc transforment un système cyclique en système cyclique. Les seules transformations C dont les transformées $\mathfrak{C}(C)$ quelconques sont C , sont celles qui déterminent une correspondance conforme directe du plan c.-à-d. dont $z' = f(z)$. S. Finikoff (Moscou).

Kasner, Edward: *Geometry of conformal symmetry (Schwarzian reflection)*. Ann. of Math., II. s. 38, 873—879 (1937).

If k is the curvature of a plane analytic curve C , s its arc, then the equation of C may be written as follows

$$y = \frac{k}{2!} x^2 + \frac{k'}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} (k'' + 3k^3) x^4 + \dots; \quad \left(\frac{d(\quad)}{ds} \equiv (\quad)' \right). \quad (1)$$

Requiring that the anticonformal transformation

$$x + iy = \sum_1^{\infty} m_a (x - iy)^a \quad (2)$$

preserves C we may express the coefficients m_a by means of k and its derivatives. It follows from this that we are able to find the image \bar{D} [under the symmetry (2) which preserves C] of any given curve D which intersects C at the origine and consequently find some conformal relationships between the curvatures of the treated curves and its derivatives. Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Cimmino, Gianfranco: *Sulla rappresentazione conforme delle superficie non analitiche dotate di singolarità*. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 63—68 (1937).

Let S be a piece of surface given by equations of the form $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Put, as usual, $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, $W = (EG - F^2)^{1/2}$. If S has singularities, then the partial derivatives x_u, \dots, y_v will generally be discontinuous functions, but E, F, G, W might remain continuous (for instance, if v is the arc-length measured on the curves $u = \text{const}$, then $G \equiv 1$, that is G is continuous, even if the curves $u = \text{const}$ have corners). The purpose of the paper is to show that if S has only singularities of certain simple types, then the parameters can be chosen in such a way that $E/W, G/W, F/W$ are continuous and satisfy a Hölder condition. According to a fundamental theorem of Lichtenstein (Bull. Acad. Sci. Cracovie 1916, 192—217) it is then possible to change to new parameters which are such that the new fundamental quantities $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ satisfy the equations $\bar{E} = \bar{G}, \bar{F} = 0$. In other words, S admits then, in the small, of a bi-unique and continuous map which is conformal except possibly at the singular points. The singularities considered in the paper are edges and conical points. No assumptions concerning analyticity are made. Tibor Radó (Columbus).

Hirakawa, Junkô: *The Euclidean relative differential geometry. III: Theory of surface-strips*. Jap. J. Math. 14, 23—32 (1937).

Es wird eine relative Differentialgeometrie der Flächenstreifen entwickelt. Ein Haupthilfsmittel ist dabei die durch parallele Streifennormalen vermittelte Abbildung eines beliebigen Streifens auf einen Tangentialstreifen der Eichfläche. Nach Herleitung der den Frenetschen analogen Ableitungsgleichungen und Diskussion der darin auftretenden Invarianten werden insbesondere spezielle Streifenklassen wie relativ-geometrisch verallgemeinerte Schmiege-, Krümmungs- und geodätische Streifen betrachtet. (I. und II. vgl. dies. Zbl. 13, 129 u. 16, 273.) W. Fenchel (Kopenhagen).

Ciannopulos, Konst.: Über Mischgewebemannigfaltigkeiten im Raume von N Dimensionen. Bull. Soc. Math. Grèce 18, 24—41 (1938) [Griechisch].

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:

Vincensini, Paul: Sur une transformation des corps convexes, et son application à la construction de l'ensemble des corps convexes de l'espace à n dimensions, à partir de certains sous-ensembles bases. Bull. Soc. Math. France 65, 175—189 (1937).

Ausführliche Darstellung der in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 16, 374) mitgeteilten Untersuchung. Ref. bemerkt, daß sich das Ergebnis des Verf. auf wenigen Zeilen folgendermaßen herleiten läßt: Es bezeichnen D_0 einen zentralsymmetrischen und H einen beliebigen konvexen Körper, beide mit stetigen, überall positiven Hauptkrümmungsradien. Es wird dann behauptet, daß H Linearkombination eines konvexen Körpers K mit $2D_0$ als Vektorkörper und eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers L ist. Bedeuten nämlich ξ einen variablen Einheitsvektor und $D_0(\xi)$ bzw. $H(\xi)$ die Stützfunktionen von D_0 bzw. H , so sind die Funktionen

$$K(\xi) = D_0(\xi) + \lambda[H(\xi) - H(-\xi)], \quad L(\xi) = D_0(\xi) - \lambda[H(\xi) + H(-\xi)]$$

wegen der vorausgesetzten Krümmungseigenschaften von D_0 und H für genügend kleines $\lambda > 0$ Stützfunktionen konvexer Körper K und L (nämlich sobald das 2λ -fache Maximum der Hauptkrümmungsradien von H kleiner oder gleich dem Minimum der Hauptkrümmungsradien von D_0 ist), und es gilt wegen $D_0(\xi) = D_0(-\xi)$

$$K(\xi) + K(-\xi) = 2D_0(\xi), \quad L(\xi) = L(-\xi)$$

und

$$H(\xi) = \frac{1}{2\lambda} [K(\xi) - L(\xi)],$$

wie behauptet.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Maak, W.: Berichtigung zu „Integralgeometrie XVIII“. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 179 (1938).

Es wird ein Versehen berichtigt, welches in der Arbeit „Integralgeometrie 18“ (vgl. dies. Zbl. 16, 79) bei der Definition der Gruppe \mathfrak{Z}^* (S. 94) unterlaufen ist. Haupt.

Maak, Wilhelm: Integralgeometrie. XXVII. Über stetige Kurven. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 163—178 (1938).

Es handelt sich um Integralgeometrie in der euklidischen Ebene; und zwar werden sowohl die Poincarésche Formel (I) als die Blaschkesche kinematische Hauptformel (II) unter bisher unbekannt schwachen Voraussetzungen bewiesen. Im einzelnen lauten die Behauptungen: (I) Sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 rektifizierbare (= streckbare) Summen von abzählbar vielen einfachen Bogen, so ist die mittlere Schnittpunktszahl von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 gleich dem Produkt der Längen L_1, L_2 von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$; in Formel: $\frac{1}{4} \int N \mathfrak{R}_2 = L_1 L_2$, wobei N die Schnittpunktszahl von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 bezeichnet. Allgemeiner ist die mittlere Schnittpunktszahl einer (einfachen) streckbaren \mathfrak{R}_1 mit einer (nicht notwendig streckbaren) \mathfrak{R}_2 proportional der Länge von \mathfrak{R}_2 . Daraus folgt: \mathfrak{R}_2 ist dann streckbar, wenn \mathfrak{R}_2 mit einer streckbaren (einfachen) \mathfrak{R}_1 im Mittel endlich viele Schnittpunkte gemeinsam hat. Durch Spezialisierung von \mathfrak{R}_1 zu einer Geraden bzw. einem Kreise gelangt man von hier aus zu Streckbarkeitskriterien, welche sich auch aus früheren Sätzen von Marchaud [Acta math. 50, 67—115 (1930)] ergeben. — (II) Die Anzahl der Komponenten des Durchschnittes zweier (einfach zusammenhängender) je von einer streckbaren, einfachen geschlossenen Kurve $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ begrenzten Gebiete $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ ist im Mittel gleich $2\pi(F + F') + LL'$, wo F bzw. F' die Flächeninhalte von \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{G}' bezeichnen und L bzw. L' die Längen von \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{R}' . — Bei den Beweisen werden u. a. zwei an sich bemerkenswerte Hilfssätze verwendet, nämlich A: Nur wenige Strecken genügend kleiner fester Länge schneiden einen einfachen streckbaren Bogen \mathfrak{B} in mehr als einem Punkte; in Formel: $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int (N - P) \mathfrak{B} = 0$, wobei \mathfrak{B} die Strecke, s ihre Länge, N die Anzahl der Schnittpunkte von \mathfrak{B} mit \mathfrak{B} und $P = 1$ bzw. $P = 0$ für $N = 1$ bzw. $N \neq 1$.

B: Jedem einfachen Bogen \mathfrak{J} kann ein einfaches, beliebig feines Polygon \mathfrak{P} beschrieben werden; dabei soll „beliebig fein“ besagen: Ist $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben und sind \mathfrak{J}_ν , $\nu = 1, \dots, n$, beliebig vorgegebene verschiedene Teilbogen von \mathfrak{J} , so gibt es ein \mathfrak{P} mit maximaler Seitenlänge kleiner als ε und so beschaffen, daß auf jedem der \mathfrak{J}_ν mindestens ein Eckpunkt von \mathfrak{P} liegt.

Haupt (Erlangen).

Wu, Ta-Jen: Integralgeometrie. XXVIII. Über elliptische Geometrie. Math. Z. 43, 495—521 (1938).

Systematische Entwicklung der Integralgeometrie des elliptischen Raumes. Mehrere diesbez. Ergebnisse sind schon früher, insbesondere von Herglotz (in seiner Vorlesung von 1933) hergeleitet worden und ergeben sich hier z. T. auf anderem Wege. Infolge der metrischen Dualität und der Endlichkeit des elliptischen Raumes ist manches einfacher und durchsichtiger als im euklidischen Fall. Nach Einführung der Punkt-, Ebenen- und Geradendichte und Herleitung ihrer wichtigsten Eigenschaften wird die kinematische Dichte definiert und zu der bekannten, hier nach Blaschke neubegründeten Abbildung der Bewegungen des elliptischen Raumes auf die Paare von Drehungen je einer Kugel in sich in Beziehung gesetzt. Hiernach ist die kinematische Dichte das Produkt der kinematischen Dichten und die Geradendichte, von einem konstanten Faktor abgesehen, das Produkt der Punktdichten auf den beiden Kugelflächen. Es folgt eine Darstellung der Beziehungen zur Flächentheorie des elliptischen Raumes: Polarfläche, sphärische Abbildung mittels Cliffordscher Parallelen, Herleitung der Relation zwischen relativer und absoluter Flächenkrümmung (nach Blaschke, vgl. dies. Zbl. 15, 122). Ferner wird die kinematische Hauptformel bewiesen, auf drei Gebiete erweitert und zur Herleitung einiger spezielleren Formeln, namentlich für konvexe Flächen, verwendet; u. a. ergibt sich das Analogon der Steiner'schen Formel für das Volumen einer Parallellfläche. Aus dieser Formel werden einige Ungleichungen zwischen den fundamentalen Invarianten einer konvexen Fläche und den Radien ihrer um- bzw. eingeschriebenen Kugel gefolgert. [Infolge eines Versehens sind diese Ungleichungen wesentlich entstellt; in (180), S. 520, muß auf der rechten Seite $V_u + M_u$ statt V_u und in (184) kann $V_i + M_i$ statt V_i stehen.] W. Fenchel.

Mathematische Physik.

Optik:

● Synge, J. L.: Geometrical optics. An introduction to Hamilton's method. (Cambridge tracts in math. a. math. phys. Edited by G. H. Hardy a. E. Cunningham. Nr. 37.) London: Cambridge univ. press. 1937. IX, 110 pag. a. 37 fig. 6/6.

Hamilton's ideas are presented in their original form, without the modifications, but also without the extensions modern authors have added. — The representation avoids the abstraction of Hamilton's original papers by specializing for isotropic, homogeneous media, and can therefore serve as a good introduction to Hamilton's work. It collects all the applications Hamilton made of his theory; most of them have been published only recently. — The last two chapters derive, besides others, Seidel's image error theory from Hamilton's conception, and give some applications to heterogeneous media.

M. Herzberger (Rochester).

Picht, Johannes: Zum Phasenkontrastverfahren von Zernike. Z. Instrumentenkde 58, 1—12 (1938).

Fortsetzung zu zwei früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 14, 380 u. 15, 286). Der Verf. berichtet zunächst über einige persönliche Mitteilungen Zernikes. Er macht sodann auf eine Unbestimmtheit in seiner früheren Einteilung der Lichterscheinung aufmerksam. Als „Grundanteil“ ist dort die Lichterscheinung gesetzt, die entstünde, wenn die ganze Öffnung Amplitude und Phase ebenso beeinflusste wie die b -Streifen. Man könnte ebensowohl die b' -Streifen wählen. Picht zeigt an einem einfachen Fall (Phasengitter aus zwei einzelnen Streifen von sehr ungleicher Breite), daß beide An-

nahmen zu ganz verschiedenen Schlüssen führen können. — Er empfiehlt nun, den Grundanteil so zu bestimmen, daß er „wieder das Beugungsbild des ganzen Objekts, ohne Rücksicht auf seine besondere, Amplitude und Phase verschieden beeinflussende Struktur, darstellt, Durchlässigkeit und Phaseinfluß dieser mit dem vorgegebenen Objekt gleich großen und gleich umrandeten Öffnung aber so zu wählen, daß der „überlagerte, strukturbedingte Anteil“ für $\gamma = 0^\circ$ den Wert Null annimmt“. Für $\bar{N} = N$ erhält P. (es ist ein früher vernachlässigter Faktor mit berücksichtigt) die beiden Teile von $u_{F\gamma}$ in der Form:

$$u_{F\gamma} = \frac{\sin \theta}{\theta} \sqrt{b^2 D^2 + b'^2 D'^2 + 2bb'DD' \cos \Delta\Phi} e^{i(\varepsilon - \zeta + \Phi + \frac{1}{2}\Delta\Phi + \psi)} \\ + \frac{\sin \theta}{\theta \sin \theta} \sqrt{D^2 + D'^2 - 2DD' \cos \Delta\Phi} \times \\ \times \sqrt{b^2 \sin^2 \delta' + b'^2 \sin^2 \delta - 2bb' \sin \delta \sin \delta' \cos \theta} e^{i(\varepsilon - \zeta + \Phi + \frac{1}{2}\Delta\Phi + \omega + \chi)}. \\ \operatorname{tg} \psi = \frac{b'D' - bD}{b'D' + bD} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta\Phi, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{D' + D}{D' - D} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta\Phi, \quad \operatorname{cotg} \chi = \frac{b \operatorname{ctg} \delta - b' \operatorname{ctg} \delta'}{b + b'}.$$

Sonderfälle sind ein Phasengitter und ein Amplitudengitter. Es zeigt sich, daß beim Phasengitter derselbe Phasenunterschied zwischen Grundanteil und überlagertem Anteil herauskäme wie beim Amplitudengitter, wenn die Phase des Grundanteils um $\frac{\pi}{2} - \psi$ geändert würde. Es läßt sich auch das Verhältnis von D und D' angeben, das ein unter dieser Annahme fingiertes Amplitudengitter haben müßte. Das Zernike'sche Verfahren soll den Grundanteil um $\pm \frac{\pi}{2}$ ändern, ψ ist unbekannt. P. gibt Formeln für die Scheinwerte $D_S, D'_S, \Delta\Phi_S$, die ein Amplituden-Phasen-Gitter von gleicher Ausdehnung und gleicher Streifenbreite haben müßte, um bei Änderung des Grundanteils um $\pm \frac{\pi}{2}$ dieselbe Wirkung zu haben wie ein vorliegendes Phasengitter mit den Werten $D = D', \Delta\Phi$; er verallgemeinert sie sogleich auf den Fall, daß auch das vorliegende Gitter ein Amplituden-Phasen-Gitter ist ($D \neq D'$). Man kann nun umgekehrt (ohne Zernikesche Platte) D, D' und (mit Zernikescher Platte) D_S oder D'_S bestimmen; P.s Gleichungen liefern eine Formel für $\Delta\Phi$. Vorausgesetzt ist aber, daß die Platte im wesentlichen nur die Phase des Grundanteils, nicht auch die des überlagerten Anteils beeinflusst. P. kommt zu dem Ergebnis, daß dies um so genauer stimmt, je größer N ist. Zum Schluß wird der Fall $\bar{N} = N + 1$ behandelt.

Hans Boegehold (Jena).

Kohler, M., und M. v. Laue: Berichtigung zu Arbeiten über die dynamische Theorie der Röntgeninterferenzen. Ann. Physik, V. F. 30, 752 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 7, 430 u. 12, 236.

Cotte, Maurice: Les aberrations du second ordre des systèmes orthogonaux. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1145—1147 (1937).

Im Anschluß an zwei frühere Arbeiten [C. R. Acad. Sci., Paris 205, 129 u. 974 (1937); dies. Zbl. 17, 43 u. 331] gibt der Verf. in der vorliegenden Arbeit Formeln für die Aberrationen zweiter Ordnung in orthogonalen elektronenoptischen Systemen. Der Verf. leitet die Formeln nicht ab, sondern erwähnt nur, daß sie sich herleiten lassen nach einer Methode der Variation der Konstanten, wie dies von Scherzer für zentrische Systeme getan sei.

Picht (Neubabelsberg).

Quantentheorie:

● Buhl, A.: Analogies corpusculaires et ondulatoires. Mém. Sci. physiques Facs. 34, 62 pag. Paris (1937).

● Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Hrsg. v. A. Eucken u. K. L. Wolf. Bd. 1. Theorien des Aufbaues der Materie. Abschnitt 2. — Kramers, H. A.: Quanten-

theorie des Elektrons und der Strahlung. Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1937. XI, 280 S. u. 2 Fig. RM. 26.80.

Dieser zweite Teil von Kramers Buch (vgl. dies. Zbl. 8, 138) bringt den Elektronenspin, das Ausschließungsprinzip und die Theorie der elektromagnetischen Strahlung. Von bemerkenswerten Einzelheiten seien erwähnt, die vom Verf. herrührende klassische Beschreibung des Spinelektrons, die Darstellung der Drehungs- und Lorentz-Gruppe in Zusammenhang mit den Spinfragen unter Heranziehung von komplexen Raumvektoren, die mathematische Behandlung der Spinmultipletts, die Formulierung der sog. Überquantelung sowie die Darstellung und Kritik der Quantentheorie der Strahlung.

O. Klein (Stockholm).

Kramers, H. A.: The use of charge-conjugated wave-functions in the hole-theory of the electron. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 814—823 (1937).

Die Dirac-Heisenbergsche Löchertheorie (im Sinne der „zweiten Quantelung“) sowie die kürzlich gegebenen diesbezüglichen Ausführungen von Majorana können, wie Verf. zeigt, erheblich vereinfacht werden durch Einführung und systematische Anwendung des Begriffs einer „ladungskonjugierten“ Wellenfunktion ψ^L zu ψ . Dieses ψ^L erfüllt gleich ψ die Diracsche Wellengleichung, aber mit umgekehrtem Vorzeichen der Elektronenladung.

P. Jordan (Rostock).

Scherrer, W.: Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips. III. Mitt. Helv. phys. Acta 10, 475—489 (1937).

Seine vierdimensionale Potentialtheorie weiterführend (dies. Zbl. 16, 238 u. 17, 331), stellt der Verf. ihr entsprechende Hamiltonsche Bewegungsgleichungen sowie gewisse Quantenbedingungen auf, die mit der Quantentheorie der wasserstoffähnlichen Atome verglichen werden.

O. Klein (Stockholm).

Roubaud-Valette, Jean: Passage des grandeurs vectorielles aux spineurs correspondants par la notion de sous-espaces. Interprétation des équations de M. Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1136—1139 (1937).

Elegante Formulierung einiger Relationen betreffs der Verallgemeinerung der Diracgleichung für den de Sitterschen Raum.

P. Jordan (Rostock).

Yvon, Jacques: Sur les équations tensorielles de l'électron magnétique. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1367—1369 (1937).

Mittels der vier Wellenfunktionen einer Diracgleichung und ihrer konjugiert Komplexen werden 16 Tensorgrößen bilinear aufgebaut, welche 9 explizite angegebene Identitäten erfüllen und die als Ersatz der Wellenfunktionen gelten können.

Klein.

Lemaître, G.: Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 57, 165—172 (1937).

Unter Ausnutzung der bekannten Tatsache, daß die Algebra der Diracschen Matrizen (also der Matrizen vierten Grades) äquivalent ist der Algebra der Biquaternionen (direktes Produkt zweier Quaternionenalgebren), zeigt der Verf., wie die von Eddington entwickelten Eigenschaften der Diracmatrizen hergeleitet werden können ohne Zugrundelegung einer spezialisierten Matrixdarstellung dieser Algebra; die Herleitung gewinnt dadurch erheblich an Kürze und Durchsichtigkeit.

P. Jordan.

March, Arthur: Die Gravitationsenergie des Photons. Z. Physik 106, 291—295 (1937).

Durch Abschneiden der Wirkungen von Wellen, die kürzer sind als der Elektronenradius, ergibt sich eine endliche Gravitationsenergie für ein Lichtquant, die für $\nu = 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ etwa 1% von $h\nu$ beträgt.

O. Klein (Stockholm).

Umeda, Kwai, und Yôrô Ôno: Über das dynamische Flüssigkeitsmodell des Atomkerns. Sci. Pap. Inst. phys. chem. Res., Tokyo 32, 120—128 (1937).

Bloch (this Zbl. 6, 274) extended the statical Thomas-Fermi treatment of a many-electron atom to a dynamical one for the purpose of the calculation of the energy losses of rapidly moving charged particles. — The authors consider a nucleus consisting

of neutrons and protons using Bloch's dynamical method. For the characteristic frequencies of such a nuclear model they obtain values of a reasonable order of magnitude.

Guth (Notre Dame, U. S. A.).

Kapur, P. L., and R. Peierls: Penetration into potential barriers in several dimensions.

Proc. roy. Soc., Lond. A **163**, 606—610 (1937).

The penetration of particles into regions of negative kinetic energy is discussed. It is shown that for problems which cannot be reduced by separation to the one-dimensional case, it is generally possible to derive an upper limit for the probability of penetration, and that in special cases the method gives the actual value of this probability.

Whittaker (Edinburgh).

Laue, M. v.: Die Stromverteilung in Supraleitern. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1937**, 240—245 (1937).

Sowohl die Verteilung eines Stromes über den Querschnitt in einem Supraleiter als auch die Verteilung auf die einzelnen Zweige in einem aus mehreren Leitern bestehenden Stromkreis läßt sich aus dem Prinzip ableiten, daß die magnetische Energie zu einem Minimum werden soll. Das Resultat gilt auch (unter Vernachlässigung einer sehr dünnen Oberflächenschicht) in der Londonschen Theorie.

R. Peierls.

Astrophysik.

Sterne, T. E.: Modes of radial oscillation. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 582—593 (1937).

Eddington hat mittels numerischer Methoden die Periode der infinitesimalen adiabatischen radialen Pulsationen einer Gaskugel ermittelt, deren Aufbau durch die Polytrope des Index 3 beschrieben ist. Es wurde die Pulsation nullter Ordnung (ein Schwingungsknoten) untersucht. Verf. untersucht die folgenden vereinfachten Sternmodelle: konstante Dichte, Dichte umgekehrt proportional der Entfernung vom Zentrum, Punktmasse von einem Gas vernachlässigbarer Gesamtmasse umgeben, dessen Dichte umgekehrt proportional der Entfernung vom Zentrum ist. Für diese Modelle gelingt es, einfache algebraische Ausdrücke für die Perioden beliebiger Ordnung abzuleiten. Die Ergebnisse werden diskutiert und mit den von Eddington und Edgar erhaltenen verglichen. Mit wachsender Ordnung wird die Periode gegen Änderungen in der Dichteverteilung und des Index γ des adiabatischen Ansatzes $P = \text{konst.} \cdot \rho^\gamma$ weniger empfindlich. Verf. betont zum Schluß die Möglichkeit der Existenz von Pulsationen höherer Ordnung in vereinzelt Cepheiden.

Bengt Strömberg (Chicago).

Milne, E. A.: Stellar luminosity and the opacity in the outer layers of a star. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **98**, 21—41 (1937).

This is a development of previous work (this Zbl. **13**, 327; **16**, 424) in which the author's general purpose is to obtain as much information as possible about a star from its observable characters, without using a detailed model of the interior. The new feature now introduced is a division of the outer layers of the star into three zones: Zone *A* in which the temperature T varies from its boundary value T_0 to the effective temperature T_1 ; Zone *B* in which T remains comparable with T_1 ; Zone *C* in which T is large compared with T_1 but small compared with the mean temperature of the interior. Zone *C* is the "effective boundary" of the region in which "interior" conditions obtain, as used by other writers. The zones are fitted together by making the gas-pressure p continuous at the interfaces, and the general methods employed here are similar to those of the earlier papers. Equating the values of p obtained by working inwards from the boundary and outwards from the centre to zone *C* provides a relation between the luminosity L , mass M , molecular weight μ in zone *C*, the mean opacity $\bar{\kappa}$ down to zone *C*, together with a dimensionless parameter depending on the internal density-distribution. The author deduces that, when this parameter is given by a polytrope of index 3, Eddington's quartic equation and luminosity formula

determine, not the interior opacity, but the mean exterior opacity in zone *C*. He concludes that the usual results concerning the gaseous character of the interior, and its hydrogen content, legitimately apply only to zone *C*. The author then recovers a result formally almost the same as Eddington's mass-luminosity relation, but involving only parameters appropriate to the outer layers. He proposes a method of using only observable properties of a star to test the assumption that the interior is a complete polytrope. Finally, he shows that zone *C* can always regulate its opacity to accommodate any interior circumstances by suitably adjusting its extension and so determining the radius and mean density of the star. *W. H. McCrea* (Belfast).

Severny, A. B.: Influence of the concentration of the energy sources on the occurrence of convection in stars. *Astron. J. Soviet Union* 14, 431—445 (1937).

The author studies the stellar models for which the law of concentration of energy sources towards the centre is given by the relation $L(r)/M(r) \sim T^l$, where l varies from 0 to ∞ . In § 1 the fundamental equations of the problem are set up, and in the following section a qualitative discussion of them by means of the method of contact characteristics is given. In § 3 a more detailed study of the occurrence of convection in these models is made. It is shown that for $l < 3.5$ convection is possible in the outer parts of the model; for $l > 3.5$ (i.e. high central concentration of the sources of energy) convection may occur at the centre too, provided that $1 - \beta_c > 1 - \beta_c^0$, β_c^0 being a certain critical value of β_c (β denotes as usual the ratio of gas pressure to total pressure, and the suffix *c* indicates that central values are to be taken). These conclusions agree well with the results of other authors. *Steensholt* (Oslo).

McCrea, W. H.: The ejection of matter by novae. *Z. Astrophys.* 14, 208—217 (1937).

Aus Beobachtungen folgt, daß während eines normalen Novaausbruchs etwa gleichzeitig mit dem Lichtmaximum eine Abschleuderung von Gasschalen stattfindet, die die bis dahin allein beobachtete Expansion der Nova überlagert. Verf. untersucht zunächst die Rolle des durch die Frequenzen der Absorptionslinien bewirkten Strahlungsdrucks bei diesem Vorgang. Eine Abschätzung der Masse, die durch den betrachteten Strahlungsdruck getragen werden kann, ergibt einen Wert, der mit dem von Ambarzumian und Kosirev auf ganz anderem Weg abgeleiteten Wert der abgeschleuderten Masse größenordnungsmäßig übereinstimmt. Verf. gelangt sodann durch Betrachtung des Falls der angenähert isothermen Expansion einer Atmosphäre wie die Sonnenatmosphäre zu dem Schluß, daß der betrachtete Strahlungsdruck zu einer Massenabschleuderung führt, wenn der Radius einen Wert von etwa 100 Sonnenradien erreicht. Sodann wird der Strahlungsdruck durch die Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums betrachtet. Es ergibt sich, daß dieser Strahlungsdruck im allgemeinen größer sein wird als der durch die Absorptionslinien bewirkte. Dies bedeutet, daß die Abschleuderung im allgemeinen bei einem etwas kleineren Radius als dem vorhin berechneten stattfinden wird. Jedoch würde die genauere Diskussion dieses Gegenstandes ein ausführlicheres Eingehen auf die Eigenschaften der betrachteten Sternatmosphären erfordern. Eine Fortsetzung der Untersuchung in diesem Sinne wird angekündigt. *Bengt Strömgren* (Kopenhagen).

Mustel, E. R.: The problem of radiative equilibrium of stellar atmospheres for the coefficient of absorption depending on the frequency. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 18, 147—150 (1938).

The author obtains an approximate solution of the equations of radiative transfer by the following device: He divides the radiation into outward and inward streams of intensities I_+ , I_- and supposes that, at any depth h , these may be represented as Planck functions of temperatures T_1 , T_2 depending on h . He then shows how to complete the solution if the absorption coefficient k_ν has the form $k_\nu = \Phi(\xi, T) \Psi(\nu, T)$, as a function of frequency ν , local temperature T , and depth measured by ξ , where $d\xi = p dh$. For hot stars $\Phi(\xi, T) \propto \xi/T^{3/2}$. The function $\Psi(\nu, T)$ depends on the

assumed chemical composition of the atmosphere. The temperature distribution may, if necessary, be obtained by successive approximations. In this method of approximation a thin surface layer requires special consideration. *W. H. McCrea* (Belfast).

Mukerji, B. C.: On the possibility of expansion of a slowly rotating spheroidal mass of incoherent particles under gravitational forces. *Z. Astrophys.* 15, 1—13 (1938).

The author investigates whether a slowly rotating nebula has an inherent tendency to expand due to gravitational forces only. He assumes: (1) that the nebula has the shape of a flat ellipsoid of revolution; (2) that the individual motions of the particles composing it may be ignored, but that the system as a whole has a uniform angular velocity ω about the shorter axis; (3) that the particles form an incoherent system with no internal pressure; (4) that the gravitational field may be represented by a weak modification of the galilean metric. After an elaborate but clearly stated series of calculations he obtains approximate formulae for the trajectory of a particle in the internal field of the nebula, squares and higher powers of ω being neglected, and makes a number of deductions about the nature of the orbit. Proceeding to a second approximation in which terms in ω^2 are retained, he concludes finally that, to this order of approximation, a closed elliptic path of the Newtonian field has no tendency to expand, but is subject to a perihelion rotation of calculated amount. Numerical results are given for the effect due to a nebular mass of the size and dimensions of our galaxy.

H. S. Ruse (Southampton).

Jahn, W.: Über den Einfluß der Massenverteilung in der Umgebung der Spiralnebelkerne auf die Ausbildung von Spiralarmen. *Astron. Nachr.* 264, 185—188 (1937).

Lindblad sowie Vogt und Lambrecht haben das Problem der Gestalt und Größe der Arme von Spiralnebeln auf dynamischer Grundlage untersucht. Verf. untersucht in diesem Zusammenhang den Einfluß der nach neueren Beobachtungen relativ ausgedehnten Massenverteilung um die Spiralnebelkerne. Das betrachtete Spiralnebelmodell hat einen homogenen kugelförmigen Kern, der von einem homogenen Rotationsellipsoid der konstanten Dichte ρ_S (den nicht zum Kern gehörigen Sternen entsprechend) sowie von einem zweiten homogenen Rotationsellipsoid der Dichte ρ_M (der sich weiter nach außen erstreckenden Massenverteilung entsprechend) umgeben ist. Für die Kräfte wird das Newtonsche Gesetz angesetzt. Verf. beschränkt die Untersuchung auf Bewegungen in der Ebene des Spiralnebels. Verf. gelangt zu dem Ergebnis, daß die eingangs erwähnte Massenverteilung die Ausbildung der Spiralarme hemmt..

Bengt Strömgren (Kopenhagen).

Lindblad, B.: Über die Neigung der Spiralnebel. *Astron. Nachr.* 264, 303—306 (1937).

Mineur, Henry: Sur l'équilibre dynamique des nuages galactiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 166—169 (1938).

Es wird eine dem allgemeinen galaktischen Sternfeld überlagerte ellipsoidische Wolke von N Sternen betrachtet. Als notwendige und hinreichende Bedingung für dynamisches Gleichgewicht wird die Verteilungsfunktion der Koordinaten ξ, η, ζ und der konjugierten Impulse p_ξ, p_η, p_ζ in der Form $N \theta^3 \frac{h_1 h_2 h_3}{8\pi^3} e^{-\theta h \gamma} d\xi d\eta d\zeta dp_\xi dp_\eta dp_\zeta$ angesetzt, wo $\theta = 5/2$ und $h\gamma = h_1\gamma_1 + h_2\gamma_2 + h_3\gamma_3$ das aus den drei Integralen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ der Bewegungsgleichungen des Einzelsterns gebildete allgemeine Integral ist. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich eine Strömung in der Wolke, die einer differentiellen Rotation um das galaktische Zentrum entspricht (jedoch mit anderen Koeffizienten als im allgemeinen Sternfeld ohne die überlagerte Wolke), und für die Restgeschwindigkeiten eine ellipsoidische Verteilung mit angebbaren Elementen. Die numerische Untersuchung von Spezialfällen zeigt, daß die hellen Milchstraßenwolken nach diesem Modell gebaut sein können.

Wempe (Heidelberg).